МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Московский технологический университет"

МИРЭА

Филиал МИРЭА в г. Фрязино

Кафедра общенаучных дисциплин

ПРИНЯТО	**УТВЕРЖДАЮ**
на заседании кафедры ОНД	Заведующий кафедрой
(протокол № 2	_________ (_____________)
от «23» октября 2015 г.)	«___»_________2015 г.

В.И.ШАПОВАЛОВ

НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Курс лекций для студентов направления подготовки 11.03.04
«Электроника и наноэлектроника»

Лекция 1

Основные понятия и определения в теории надежности

Причины возникновения проблемы надежности

Можно выделить пять причин возникновения проблемы надежности, которые привели к быстрому развитию теории надежности в 40 – 50 годы прошлого столетия. К ним относятся:

1) усложнение ЭС и систем автоматического управления;
2) отставание качества и надежности ЭС от их количественного применения;
3) усложнение условий эксплуатации ЭС;
4) возрастание цены отказа ЭС;
5) невозможность восстановления после отказа во время работы в ряде случаев (атомные реакторы, агрессивные среды и т.д.).

Методы повышения, обеспечения и сохранения надежности

Вопросами надежности ЭС необходимо заниматься на всех этапах жизненного цикла изделий: при проектировании, производстве и эксплуатации.

При проектировании это выбор надежных элементов, облегчение режимов работы элементов, резервирование, современные методы проектирования изделий и др.

При производстве это применение современных технологий, более качественных материалов, современных методов контроля и испытаний и др.

При эксплуатации это повышение квалификации персонала и своевременное проведение профилактических работ, обеспечение запасными частями и др.

Основные понятия и определения в теории надежности

В соответствии с ГОСТ 27.002-89 «Надежность в технике. Термины и определения» *надежность* – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.

Надежность определяется безотказностью, долговечностью, ремонтопригодностью, сохраняемостью.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений, поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонтов.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять значения показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности в течение хранения и (или) транспортирования и после.

Исправное состояние – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Работоспособное состояние – состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации. Например, если повреждено покрытие корпуса прибора, то он является работоспособным, но неисправным.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

Восстанавливаемый объект – объект, для которого в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Ремонтируемый объект – объект, для которого проведение ремонтов предусмотрено в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Единичный показатель надежности – показатель надежности, характеризующий одно из свойств, составляющих надежность объекта.

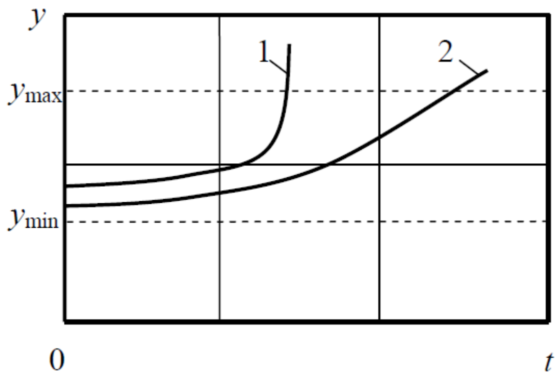
Комплексный показатель надежности – показатель надежности, характеризующий несколько свойств, составляющих надежность объекта.

Независимый отказ – отказ объекта, не обусловленный отказом другого объекта.

Зависимый отказ – отказ объекта, обусловленный отказом другого объекта. Например, перегорание резистора часто обусловлено пробоем конденсатора.

Внезапный отказ 1– отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких заданных параметров объекта (см. рисунок). Например, пробой конденсатора приводит к перегоранию резистора

Постепенный отказ 2 – отказ, характеризующийся постепенным изменением значения одного или нескольких заданных параметров объекта (см. рисунок). Обычно постепенный отказ происходит в результате старения или износа материалов



Перемежающийся отказ – многократно возникающий, самоустраняющийся отказ объекта одного и того же характера.

Конструкционный отказ – отказ, возникающий в результате несовершенства или нарушения установленных правил и (или) норм конструирования объекта.

Производственный отказ – отказ, возникающий в результате несовершенства или нарушения установленного процесса изготовления или ремонта объекта, выполнявшегося на ремонтном предприятии.

Эксплуатационный отказ – отказ, возникший в результате нарушения установленных правил и (или) условий эксплуатации объекта.

Лекция 2.

Показатели надежности

Показатели, характеризующие одну из сторон надежности, называются единичными, две или более – комплексными.

Показатели надежности должны учитывать максимальное число факторов, влияющих на надежность, быть удобными для записи в техническую документацию и давать возможность их экспериментального определения.

Показатели надежности неремонтируемых изделий

К ним относятся вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа, интенсивность отказов и др.

Вероятность безотказной работы $P(\,t)$ – это вероятность того, что в пределах заданного времени или заданной наработки не произойдет отказа изделия.

В соответствии с определением

$$P(t) = P(T \geq t), \qquad (2.1)$$

где T – время безотказной работы, являющееся случайной величиной; t – заданное время.

Если записать $P(t) = P(t \leq T < \infty)$ и вспомнить из теории

вероятностей, что $P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, то можно записать

$$P(t) = \int_{t}^{\infty} f(\tau)d\tau.$$

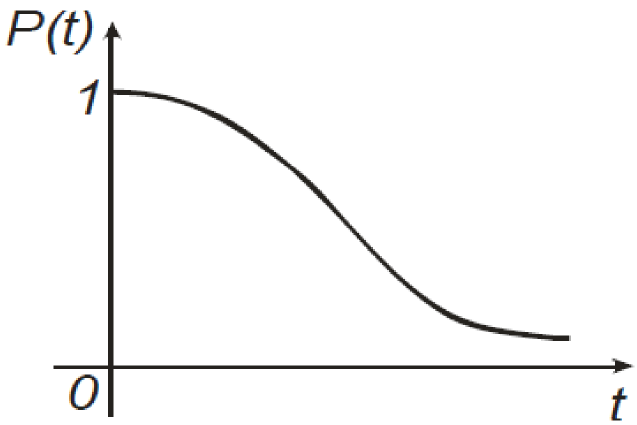


Рис. 2.1

Вероятность безотказной работы имеет следующие свойства (рис. 2.1)

1) $P(t) = 1$ при $t = 0$;
2) $P(t) = 0$ при $t = +\infty$;
3) Если $t_1 > t_2$, то $P(t_1) \leq P(t_2)$, то есть вероятность безотказной работы – невозрастающая функция своего аргумента.

Экспериментально $P(t)$ можно оценивать по выражению

$$P^{*}(t) = \frac{N(t)}{N}, \qquad (2.3)$$

где N – число испытываемых изделий; $N(t)$ – число работоспособных изделий к моменту времени t.

Вместо $P(t)$ часто используется *вероятность отказа* $Q(t)$, то есть вероятность того, что в пределах заданного времени (наработки) произойдет отказ изделия.

Можно записать

$$Q(t) = P(T < t) = P(0 < T < t), \tag{2.4}$$

а следовательно,

$$Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{2.5}$$

Складывая $P(t)$ и $Q(t)$, получим

$$P(t) + Q(t) = \int_0^t f(t)dt + \int_t^\infty f(t)dt = 1$$

или

$$P(t) + Q(t) = 1 \tag{2.6}$$

Экспериментально $Q(t)$ оценивается по выражению $Q^*(t) = \frac{n(t)}{N}$, где $n(t)$ – число отказавших изделий за время t.

Из выражения (2.4) следует, что вероятность отказа равна функции распределения времени безотказной работы изделия, то есть $Q(t) = F(t)$.

Средняя наработка до отказа $t_{\text{ср}}$ – это математическое ожидание наработки изделия до первого отказа, то есть

$$t_{\text{ср}} = \int_0^\infty tf(t)dt. \tag{2.7}$$

Учитывая, что

$$f(t) = F'(t) = Q'(t) = [1 - P(t)]' = -P'(t) = -\frac{dP(t)}{dt}, \tag{2.8}$$

и подставляя это выражение в (2.7), получим

$$t_{\text{ср}} = -\int_0^\infty tdP(t).$$

Используя правило интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, получим

$$t_{\text{ср}} = -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt.$$

При увеличении t вероятность $P(t)$ значительно быстрее стремится к нулю, чем t – к бесконечности. Поэтому можно считать, что первое слагаемое равно нулю и

$$t_{\text{ср}} = \int_0^\infty P(t)dt. \tag{2.9}$$

Очевидно, что численно $P(t)$ равняется площади под кривой $P(t)=\varphi(t)$, показанной на рис. 2.1.

Статически $t_{\text{ср}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$, где t_i – время безотказной работы i-го изделия; N – число изделий, поставленных на испытание.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ – условная плотность вероятности возникновения отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник. Статистически определяется по формуле

$$\lambda^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N(t)\Delta t}, \tag{2.10}$$

где $n(t)$ – число изделий, отказавших на интервале времени t; $N(t)$ – число изделий, не отказывавших к моменту t (рис. 2.2).

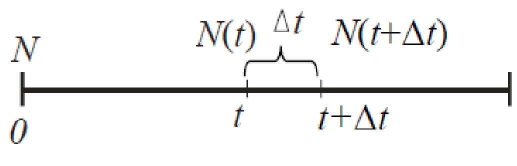


Рис. 2.2

Вероятность отказа изделий за время Δt находится по формуле

$$Q^*(\Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N(t)}.$$

Поэтому интенсивность можно трактовать как плотность вероятности отказов в интервале времени Δt.

Учитывая, что $n(\Delta t) = N(t) - N(t+\Delta t)$

$$P^*(t) = \frac{N(t)}{N} \text{ и } P^*(t+\Delta t) = \frac{N(t+\Delta t)}{N},$$

получим $n(\Delta t) = N[P^*(t) - P^*(t+\Delta t)]$.

Подставляя в (2.10) $n(\Delta t)$, найдем

$$\lambda^*(t) = \frac{P^*(t) - P^*(t+\Delta t)}{P^*(t)\Delta t}.$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to \infty \\ n \to \infty}} \lambda^*(t) = -\frac{1}{P(t)} \lim_{\substack{\Delta t \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{P^*(t+\Delta t) - P^*(t)}{\Delta t}.$$

Следовательно**,**

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.8), получим

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \qquad (2.12)$$

Логарифмируя и затем интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до t, найдем

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}. \qquad (2.13)$$

Это одна из основных формул теории надежности.

На рис. 2.3 показана типичная зависимость $\lambda(t)$. Видно, что можно выделить три периода:

1) период приработки изделия, характеризующийся высоким значением $\lambda(t)$, уменьшающимся к концу изгиба. Такой характер зависимости объясняется наличием скрытых дефектов, невыясненных при контроле, поэтому период приработки стремятся проводить на предприятии, «выжигая» элементы со скрытыми дефектами (электротренировка и т.д.);

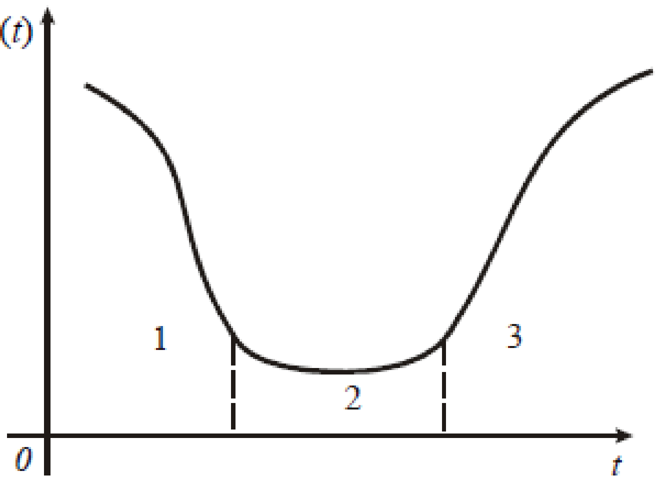


Рис. 2.3

2) период нормальной эксплуатации изделия, характеризующийся наиболее низкой интенсивностью отказов, $\lambda \approx \text{const}$;
3) период старения и износа, идет снижение надежности, увеличение интенсивности отказов.

Интенсивность отказов – основная характеристика надежности ЭС.

Лекция 3.

Показатели надежности ремонтируемых изделий

К ним относятся вероятность безотказной работы, средняя наработка на отказ (СНО), параметр потока отказов (ППО), вероятность восстановления и др.

Средняя наработка на отказ. Статистически определяется

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n},$$

где t_i – время безотказной работы; n – число циклов безотказной работы (см. рисунок).

Параметр потока отказов. Статистически определяется по формуле

$$\omega^*(t) = \frac{n(\ t)}{N\ t},$$

где N – число изделий, поставленных на испытания. При определении параметра потока отказов отказавшие изделия заменяются новыми.

Вероятность восстановления $P_B(t) = P(t_B < t)$ – это функция распределения случайной величины $t_\text{в}$ – времени восстановления изделия.

Среднее время восстановления. Статистически определяется по формуле

$$\bar{t}_\text{в}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i}{n},$$

где τ_i – время восстановления изделия после i-го отказа (см. рисунок); n – общее число отказов.

Комплексные показатели надежности

Коэффициент готовности $К_Г$ экспериментально определяются по формуле

$$K_\text{г}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} \tau_i},$$

где t_i – время безотказной работы; τ_i – время восстановления после i-го отказа.

Если поделить числитель и знаменатель на n (число отказов), то получим

$$K_Г^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i}{n}}, \qquad \text{или} \qquad K_Г^* = \frac{T^*}{T^* + t_\beta^*}.$$

При $50 < n < 100$ $К_Г$ приближается к

$$K_Г = \frac{T}{T + t_\beta}.$$

Видно, что $К_Г$ – вероятность работоспособного состояния изделия в любой момент времени.

Часто применяется *коэффициент оперативной готовности*

$$K_{ог} = K_Г P(t).$$

Коэффициент технического использования

$$K_{т.и}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} \tau_i + \sum_{j=1}^{m} t_{t0j}},$$

где t_{t0j} – время технического обслуживания; m – количество технических обслуживаний изделия.

Надежность типовых элементов

Надежность типовых элементов характеризуется интенсивностью отказов. Например, интенсивность отказов $\lambda_{i0} = 5 \cdot 10^{-6}$ 1/ч. Эта интенсивность относится к нормальным условиям эксплуатации. Усложнение условий эксплуатации приводит к снижению надежности радиоаппаратуры. Для учета дестабилизирующих факторов (повышенной электрической нагрузки, повышенной или пониженной температуры, вибрации и т.д.) вводятся поправочные коэффициенты.

Электрическая нагрузка характеризуется коэффициентом нагрузки $K_н$ – отношением значения некоторого параметра, характеризующего работу элемента в реальном режиме, к номинальному значению этого параметра, установленному ТУ.

Интенсивность отказов ЭРЭ при отклонении режимов их работы от нормальных можно представить в виде

$$\lambda(v) = \lambda_{i0} a_1 a_2 \ldots a_n ,$$

где a_1, a_2,…, a_n– коэффициенты, учитывающие эти отклонения, а λ_{i0} – интенсивность отказов при нормальных условиях ($K_\text{н} = 1$, $t = +25$ ºC, механические нагрузки отсутствуют, относительная влажность 65 %).

Значения λ_{i0} берут из таблиц, а коэффициенты a_i – из таблиц или графиков [3].

Лекция 4

Законы распределения времени безотказной работы ЭС

Знание этих законов распределения $f(t)$ необходимо, так как все основные показатели безотказности являются функцией этих законов, например $P(t) = \int_t^\infty f(t)dt,\ t_{\text{ср}} = \int_0^\infty tf(t)dt$. Они важны также при создании экономичных методов испытаний на надежность.

Потоки отказов

Под потоком отказов понимают последовательность отказов, которые происходят один за другим в случайные моменты времени

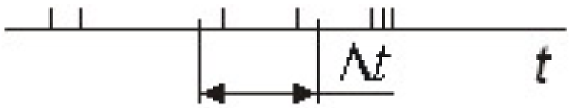


Рис. 4.1

Наибольшее применение находит простейший поток отказов.

Простейший поток отказов – это поток, который обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия.

Поток стационарный, если вероятность некоторого количества отказов в интервале времени t зависит от длины этого интервала и не зависит от положения его на оси времени.

У потока *отсутствует последствие*, если вероятность появления некоторого количества отказов в интервале времени t не зависит от того, сколько отказов произошло до начала этого интервала времени.

Поток ординарный, если вероятность появления одного отказа в малом интервале времени t значительно превышает вероятность появления двух отказов или более.

Поток отказов сложных электронных схем в период их нормальной эксплуатации соответствует простейшему потоку. Простейший поток отказов хорошо изучен в теории вероятностей и для него получена формула, называемая законом Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

где m – количество отказов; t – время; a – среднее количество отказов за время t, равное $a = \lambda t$; λ – интенсивность отказов (среднее количество отказов в единицу времени). Простейший поток часто называют пуассоновским.

Можем записать

$$P_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

Если ,например, $m = 3$, то

$$P_3(t)=\frac{(\lambda t)^3}{6}e^{-\lambda t},$$

а если $m > 1$, то

$$P_{m>1}(t)=P_2(t)+P_3(t)+\dots\ .$$

Пример. На испытания поставлено 100 изделий. Необходимо определить вероятность того, что откажет не менее двух изделий.

Можем записать

$$Pm\geq 2\ (t)=P2\ (t)+P3\ (t)+\dots+P100\ (t),$$

но учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, легче рассчитать по выражению

$$Pm\geq 2\ (t)=1-P0+P1.$$

Если рассматривать случай $m = 0$, то $P_0(t)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$, или

$$P(t) = e^{-\lambda_t} \tag{4.1}$$

Эта формула получила название экспоненциального закона надежности (рис. 4.2)

Можно вывести эту формулу и исходя из других соображений. Вероятность безотказной работы находится по формуле (2.13):

$$P(t)=e.^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$$

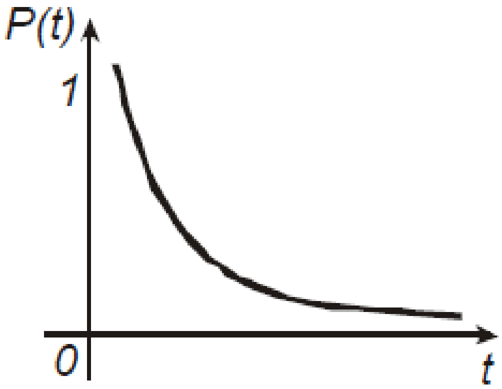


Рис. 4.2

Для периода нормальной эксплуатации $\lambda(\tau) = \lambda$– const. Тогда получим

$$P(t)=e^{-\lambda\int_0^t d\tau}=e^{-\lambda\tau\big|_0^t}=e^{-\lambda(t-0)}=e^{-\lambda t}.$$

Средняя наработка до отказа

$$t_{ср} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Эта формула

$$t_{ср} = \frac{1}{\lambda},$$

как и формула (4.2), имеет большое значение в теории надежности.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)},$$

Учитывая, что получим плотность распределения при экспоненциальном законе в виде $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

законе

Экспоненциальный закон надежности – основной закон для расчета сложных электрических схем в период нормальной эксплуатации изделий.

Нормальный закон распределения

Плотность распределения $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_{ср})^2}{2\sigma^2}}$ графически показано на рис 4.3

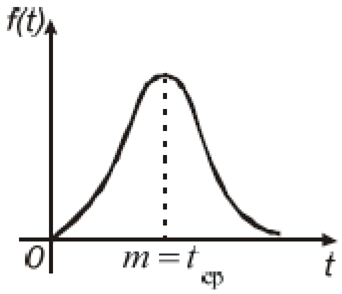


Рис. 4.3

Учитывая, что $f(t) = F'(t) = Q'(t)$, то получим

$$Q(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-t_{ср})^2}{2\sigma^2}} d\tau.$$

Введя обозначения $u = \frac{\tau - t_{ср}}{\sigma}; \quad \tau = u\sigma + t_{ср},$

найдем

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{t-t_{ср}}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Это выражение табулировано и называется *интегралом вероятностей* или *функцией Лапласа*

$$Q(t) = \Phi\left(\frac{t-t_{ср}}{\sigma}\right).$$

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - t_{ср}}{\sigma}\right).$$

Нормальный закон распределения является моделью отказов в период старения и износа.

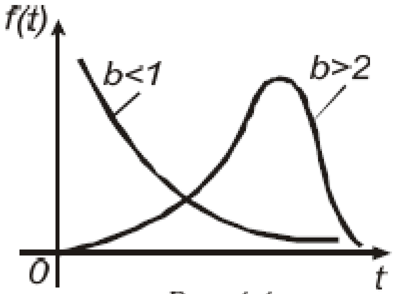


Рис. 4.4

Закон Вейбулла

Плотность распределения (рис 4.4)

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}};$$

где a характеризует масштаб распределения, b – форму распределения.

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1};$$

вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}.$$

Пусть $b = 1$, тогда $\lambda(t) = \frac{1}{a}$; $a = t_{ср}$.

Получим $P(t) = e^{-\frac{t}{a}}$, то есть при $b=1$ закон Вейбулла совпадает с экспоненциальным законом распределения. При $b=3$ закон Вейбулла практически совпадает с нормальным законом распределения.

Закон распределения Вейбулла широко применяется в теории надежности, так как он более универсален, чем ранее рассмотренные законы распределения. Наиболее часто используется как модель отказов для различных механических и электромеханических изделий.

Лекция 5

Методы расчета надежности

Классификация методов расчета надежности

Методы расчета надежности в зависимости от вида соединения элементов можно разделить на методы при последовательном, параллельном и смешанном соединениях.

Последовательное соединение – когда отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы. *Параллельное соединение* – это когда отказ системы наступает при отказе всех составляющих её элементов.

Методы расчета надежности также можно классифицировать в зависимости от видов отказов. Они делятся на расчеты при внезапных, постепенных и перемежающихся отказах.

В зависимости от этапа работы и исходных данных выделяют приближенные методы расчета надежности, приводящиеся на начальных стадиях проектирования, и точные методы.

Методы расчета надежности при последовательном соединении элементов

Пример. Необходимо определить вероятность безотказной работы $P(t)$ системы, показанной на рис. 5.1. Событие, заключающееся в безотказной работе, будет наблюдаться, если безотказно будут работать элементы 1, 2 и 3.

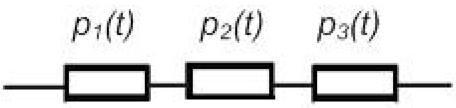


Рис. 5.1

Тогда вероятность безотказной работы

$$p(t)=p_1(t)p_2(t)p_3(t).$$

системы

При последовательном соединении элементов вероятность безотказной работы системы равняется произведению вероятностей безотказной работы элементов (рис 5.2).

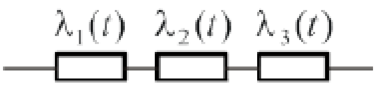


Рис. 5.2

Пусть Λ – интенсивность отказа системы, законы экспоненциальные. Можно записать

$$P(t)=e^{-\Lambda t}=e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\lambda_3 t}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}.$$

Следовательно,

$$\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

При последовательном соединении элементов и экспоненциальном законе интенсивность отказов системы определяется как сумма интенсивностей отказов элементов, составляющих данную систему.

Приближенные методы расчета надежности

Прикидочный метод. Применяется на самых ранних стадиях проектирования изделий (на стадиях технического задания и технического предложения) и основан на следующих допущениях:

– законы распределения времени безотказной работы экспоненциальные;
– соединение элементов последовательное;
– имеется аналог, характеристики надежности которого известны;
– все элементы проектируемого элемента и аналога считаются равнонадежными.

Порядок расчета:

1. Определяется усредненная интенсивность отказов элементов аналога по формуле

$$\lambda_a = \frac{\Lambda_a}{N_a},$$

где Λ_a – интенсивность отказа аналога ментов в аналоге.

2. Интенсивность отказов проектируемого изделия принимается равной интенсивности отказов элементов аналога $\lambda_n = \lambda_a$.
3. Определяется число элементов проектируемого изделия N_n.
4. Находятся интенсивность отказов проектируемого изделия

$$\Lambda n = \lambda n\, Nn\,.$$

5. Рассчитываются $P(t) = e^{-\Lambda_n t}$, $t_{\text{ср}\, n} = \dfrac{1}{\lambda_n}$.

Ориентировочный метод. Проводится на стадиях эскизного или технического проектирования, т.е. когда известна принципиальная электрическая схема изделия.

Допущения:

– законы экспоненциальные; − соединение элементов последовательное;
– режимы работы элементов нормальные.

Порядок расчета:

1. Определяется количество элементов каждого типа N_i.
2. Находится интенсивность отказов элементов каждого типа (по таблицам, например в [3]).
3. Определяется интенсивность отказа системы

$$\Lambda = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i,$$

где n – количество типов радиоэлементов.

4. Рассчитываются $P(t) = e^{-\lambda t}$ и $t_{\text{ср}} = \dfrac{1}{\Lambda}$.

Расчет надежности с учетом режимов работы элементов

Последовательность расчета:

1. Определяются режимы работы элементов ϑ_i .
2. Устанавливают количество элементов каждого типа, работающих в одинаковых режимах $N_i\,(\vartheta)$.
3. Определяют интенсивность отказов элементов с учетом режимов их работы $\lambda_i(\vartheta) = \lambda_{i0}a_1a_2...$, где λ_{i0} – интенсивность отказов при нормальных условиях; a_1, a_2, … – коэффициенты, учитывающие режимы работы.
4. находят $\Lambda(\vartheta) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(\vartheta) N_i(\vartheta)$, где m – количество одинаковых элементов, работающих в идентичных условиях.
5. Рассчитывают $P_n(t) = e^{-\Lambda(\vartheta)t}$; $t_{\text{ср}}(\vartheta) = \dfrac{1}{\Lambda(\vartheta)}$.

Расчет надежности корпусированных полупроводниковых микросхем. Интенсивность отказов в микросхеме определяется при рассмотрении ее как функционального узла, в который входят транзисторы, диоды, соединения внешние и внутренние, то есть

$$\Lambda = N_{\text{Т}} a_{\text{Т}} \lambda_{\text{Т}} + N_{\text{Д}} a_{\text{Д}} \lambda_{\text{Д}} + (3N_{\text{Т}} + 2N_{\text{Д}} + N_{\text{В}})\lambda_{\text{соед.}},$$

где $N_{\text{Т}}$ и $N_{\text{Д}}$ – число транзисторных и диодных переходов соответственно;
$\lambda_{\text{Т}}$ и $\lambda_{\text{Д}}$ – интенсивность отказов; $a_{\text{Т}}$ и $a_{\text{Д}}$ – коэффициенты, учитывающие режим работы;
$\lambda_{\text{соед.}}$ – интенсивность отказов соединений;
$N_{\text{В}}$ – количество внешних выводов.
Ориентировочно $\lambda_{\text{Т}} = 1\cdot 10^{-8}\text{ч}^{-1}$; $\lambda_{\text{соед.}} = 0{,}1\cdot 10^{-8}\text{ч}^{-1}$; $\lambda_{\text{д.}} = 0{,}6\cdot 10^{-8}\text{ч}^{-1}$.

Лекция 6

Методы расчета надежности при параллельном и смешанном соединение элементов

Понятия о резервировании

Резервирование – это способ повышения надежности путем введения дополнительных средств и возможностей с целью получения избыточности (структурной, информационной, временной и т.д.).

Структурное резервирование реализуется путем параллельного соединения элементов, как показано на рис. 6.1.

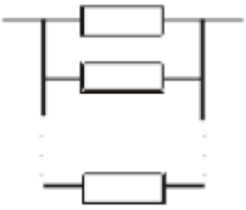


Рис 6.1

Под *кратностью резервирования* понимают отношение количества резервных цепей к количеству основных цепей.

Резервирование подразделяется на постоянное и динамическое.

При *постоянном резервировании* резервные цепи постоянно находятся в работе, как и основные цепи. К моменту отказа основных цепей ресурс резервных цепей снижается.

При *динамическом резервировании* основные цепи замещают резервными только после отказа основных цепей.

При динамическом резервировании элемент может находиться в ненагруженном состоянии (холодный резерв), нагруженном состоянии (горячий резерв) и среднем состоянии (теплый резерв).

Резервирование делится на общее и раздельное. При *общем резервировании* резервируется система в целом, при *раздельном* – отдельные элементы.

Расчет надежности при параллельном соединении элементов

Для системы (рис 6.2) $P(t) = 1 - Q(t)$, где $Q(t) = q_1(t)q_2(t) \dots q_{m+1}(t)$– вероятность отказа

$$P(t) = 1 - \{[1 - p_1(t)] \dots [1 - 1 - p_{m+1}(t)]\} =$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{m+1} [1 - p_j(t)].$$

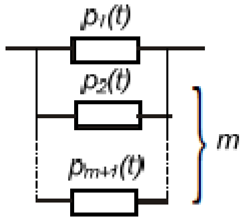


Рис. 6.2

Если $p_1(t) = p_2(t) = \dots = p(t)$, то вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - [1 - p(t)]^{m+1},$$

где m – число резервных элементов.

Пример. Если $m=2$; $p(t)=0,8$ (вероятность безотказной работы каждого элемента), то вероятность безотказной работы системы $P(t)$=0,992.

Пусть имеется система, показанная на рис. 6.3

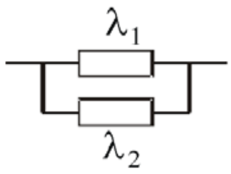


Рис. 6.3

получим

$P(t)=1-[1-p_1(t)]\cdot[1-1-p_2(t)]=p_1(t)+p_2(t)-p_1(t)p_2(t).$

Если законы экспоненциальные, то

$$P(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

и

$$t_{\text{ср}}=\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty\left[e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]dt.$$

Получим

$$t_{\text{ср}}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то

$$t_{\text{ср}}=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda}=1{,}5\frac{1}{\lambda}=1{,}5t_{\text{ср э}},$$

где $t_{ср\ э}$ – средняя наработка до отказа одного элемента.

При постоянном резервировании ресурс резервного элемента является значительно исчерпанным, поэтому увеличивая количество элементов в два раза, только в 1,5 раза повысим надежность.

Расчет надежности при общем резервировании

Необходимо определить вероятность безотказной работы системы (рис. 6.4), если одна цепь основная, а остальные m – резервные.

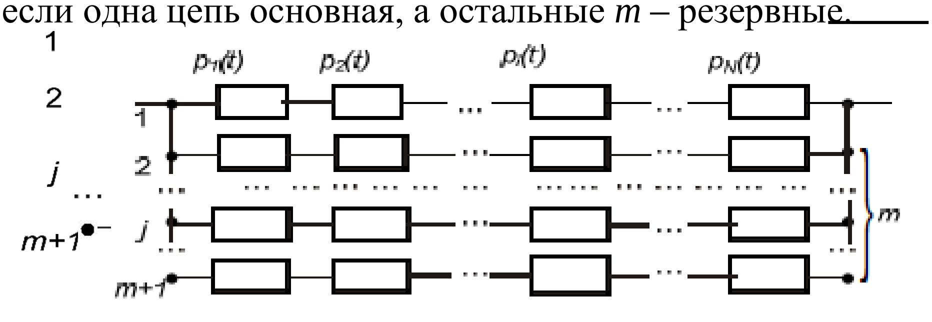


Рис. 6.4

Данная система откажет, когда откажут все цепи, составляющие систему. Тогда вероятность отказа системы будет иметь вид

$Q(t)=\prod_{i=1}^{m+1} q_{\text{ц}.i}(t)$, где $q_{\text{ц}.i}(t)$ – вероятность отказа i-й цепи.

Вероятность безотказной работы цепи

$$P_{\text{ц}.i}(t)=\prod_{j=1}^{N} p_j(t).$$

Отсюда $$Q(t)=\prod_{i=1}^{m+1}[1-p_{\text{ц}.i}(t)]=\prod_{i=1}^{m+1}[1-\prod_{j=1}^{N} p_j(t)].$$

Окончательно получим

$$P(t)=1-\prod_{i=1}^{m+1}\left[1-\prod_{j=1}^{N}\overline{\overline{P}}_j(t)\right].$$

Расчет надежности при раздельном резервировании

При раздельном резервировании (рис. 6.5) резервируется не вся цепь, а отдельные элементы.

Вероятность безотказной работы

$$P(t)=\prod_{j=1}^{N} p_{\text{зв}\,j}(t); \qquad Q_{\text{зв}.j}(t)=\prod_{i=1}^{m+1} q_i(t);$$

$$P_{\text{зв}.i}(t)=1-\prod_{i=1}^{m+1} q_i(t)=1-\prod_{i=1}^{m+1}[1-p_i(t)].$$

Вероятность безотказной работы системы $P(t)=\prod_{j=1}^{N} P_{\text{зв}\,j}(t),$

и окончательно получим

$$P(t)=\prod_{j=1}^{N}\left(1-\prod_{i=1}^{m+1}[1-p_i(t)]\right).$$

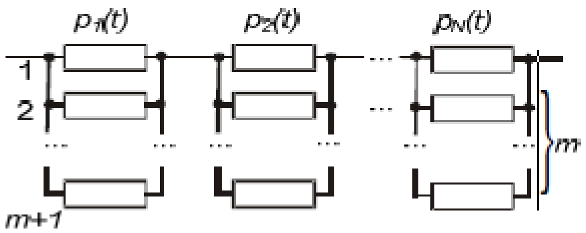


Рис. 6.5

Будем считать, что все элементы равнонадежны, то есть

$p_1=p_2=\cdots p(t)$, тогда:

- $p_1(t)=1-[1-{p_1}^N]^{m+1}$ при общем резервировании;
- $P(t)=\{1-[1-p(t)]^{m+1}\}^N$ – при раздельном резервировании.

Предположим, что *m=1; N=2; P(t)=0,8,* тогда:

$p_1(t)=1-[1-0{,}8^2]^2=0{,}87$ – при общем резервировании;

$P(t)=\{1-(1-0{,}8)^2\}^2=0{,}97$ – при раздельном резервировании.

Видно, что раздельное резервирование эффективнее общего. Но этот вывод справедлив, только для постоянного резервирования.

Если резервирование динамическое, то есть осуществляется замещением отказавших элементов, то при раздельном резервировании требуется значительно большое количество переключателей, которые являются наименее надежными элементами. Поэтому раздельное резервирование в этом случае часто оказывается менее эффективным, чем общее.

Лекция 7

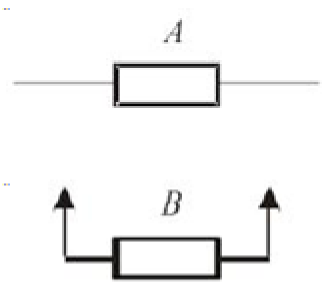
Расчет надежности при динамическом резервировании

Рассмотрим случай работы двух параллельных элементов *А* и *Б,* когда до момента отказа основного элемента *А* элемент *Б* находится в облегченных условиях (см. рисунок). Полагаем, что время безотказной работы элементов распределено по экспоненциальному закону. Найдем вероятность безотказной работы системы за время t. Возможные состояния данной системы:

H_0 – элементы *А* и *Б* в интервале времени (0, t) работают безотказно;

H_1 – элемент *А* отказывает в момент времени, а элемент *Б,* работающий безотказно в интервале времени (0, t), включается под нагрузку;

H_2 – элемент *А* в интервале времени (0, t) работает безотказно, элемент *Б* в момент времени $t_1 < t$ отказывает;



H_3 – элемент *А* отказывает в момент t_1, элемент *Б* отказывает раньше, то есть оба элемента отказывают до истечения заданного промежутка времени (0, t);

H_4 – элемент *А* отказывает в момент времени t_1, после чего включается элемент *Б,* но и он отказывает до истечения промежутка времени (0, t).

Нетрудно увидеть, что только гипотезы H_0, H_1 и H_2 являются благоприятными, определяющими вероятность безотказной работы системы за заданный промежуток времени:

$$P_{р.зам}(t) = p(H_0) + p(H_1) + p(H_2).$$

Вероятность $p(H_0)$ для случая простейшего потока отказов определяется легко:

$$p(H_0) = p_A(t)\,p_Б(t) = e^{-(\lambda_A+\lambda_Б)t}, \tag{7.1}$$

где λ_A – интенсивность отказов элемента *А;* $\lambda_Б$ – интенсивность отказов элемента *Б* в облегченном режиме.

При этом $\lambda_Б < \lambda_A$, или в случае равнонадежных элементов $\lambda_Б = k_p\lambda_A$, где k_p – коэффициент расхода ресурса (в ненагруженном режиме резерва $k_p = 0$, при нагруженном резерве $k_p = 1$, при облегченном резерве $k_p < 1$).

Вероятности других гипотез можно найти, применяя формулу полной вероятности. Так, определим вероятность $p(H_1)$. Здесь существенную роль играет момент отказа основного элемента. Если рассматривается промежуток времени $(\tau, \tau + d\tau)$, то вероятность отказа элемента A равна

$$f_A(\tau)\, d\tau,$$

где $f_A(\tau)$ – частота отказов элемента A.

Вероятность события, заключающегося в том, что система проработает безотказно в течение времени t, если в момент τ произошел отказ элемента A, равна

$$f_A(\tau)d\tau\, p_Б(t-\tau \mid \tau), \tag{7.2}$$

где $p_Б\ (t - \tau \mid \tau)$ – условная вероятность того, что элемент $Б$ проработает безотказно время $(t - \tau)$, если он не отказал за время τ.

Но отказ элемента A может произойти в любой момент в промежутке $(0, t)$. Поэтому вероятность $p(H_1)$ можно найти, просуммировав (7.2) по всем элементарным промежуткам, то есть применяя интегральную формулу полной вероятности:

$$p(H_1)=\int_0^t f_A(\tau)\, p_Б(t-\tau \mid \tau)\, d\tau. \tag{7.3}$$

Если поток отказов простейший, без последствия, то

$$p_Б(t-\tau \mid \tau)=p_Б(\tau)\, p_Б(t-\tau)=e^{-\lambda_Б\tau}e^{-\lambda'_Б(t-\tau)}, \tag{7.4}$$

где $\lambda'_Б$ – интенсивность отказов элемента $Б$ в рабочем режиме.

Вероятность

$$p(H_2)=\int_0^t f_Б(\tau)\, p_A(t-\tau \mid \tau) d\tau. \tag{7.5}$$

Поскольку отказ резервного элемента никак не влияет на режим работы основного элемента, то при простейшем потоке отказов

$$p_A(t-\tau \mid \tau)=e^{-\lambda_A\tau}e^{-\lambda_A(t-\tau)}=e^{-\lambda_A t} \tag{7.6}$$

С учетом соотношений (7.3) и (7.4) определим вероятность $p(H_1)$:

$$p(H_1)=\int_0^t \lambda_A e^{-\lambda_A\tau}e^{-\lambda_Б\tau}e^{-\lambda'_Б(t-\tau)}d\tau=\lambda_A e^{-\lambda'_Б t}\int_0^t e^{-(\lambda_A+\lambda_Б-\lambda'_Б)\tau}d\tau=\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_Б+\lambda'_Б}\left[e^{-\lambda'_Б t}-e^{-(\lambda_A+\lambda_Б)t}\right].$$

Вероятность $p(H_2)$ с учетом (7.5) и (7.6) составляет

$$p(H_2)=e^{-\lambda_A t}\left[1-e^{-\lambda_Б t}\right]. \tag{7.8}$$

Вероятность безотказной работы рассматриваемой системы за время t при простейшем потоке отказов, таким образом, равна:

$$P_{р.зам}(t) = e^{-(\lambda_A+\lambda_Б)t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_Б+\lambda'_Б}\left[e^{-\lambda'_Б t} - e^{-(\lambda_A+\lambda_Б)t}\right] + e^{-\lambda_A t}\left[1-e^{-\lambda_Б t}\right]. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) позволяет рассчитать любой случай включения резервной цепи (элемента) при условии, что переключатели абсолютно надежны. Так, например, в случае нагруженного резерва, когда $\lambda_Б = \lambda'_Б$, формула (7.9) совпадает с формулой (7.8). В случае ненагруженного резерва, когда $\lambda_Б = 0$ (отсутствует расход ресурса до момента включения элемента), формула (7.9) дает

$$P_{р.зам}(t) = e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda'_Б}\left(e^{-\lambda'_Б t} - e^{-\lambda_A t}\right).$$

Для случая, когда элементы равнонадежны *($\lambda_A = \lambda'_Б$)*, эта формула при раскрытии неопределенности во втором члене суммы по правилу Лопиталя дает

$$P_{р.зам}(t) = e^{-\lambda t}(1+\lambda t),$$

Для нахождения среднего времени безотказной работы системы проинтегрируем уравнение (7.9) в пределах (0, ∞):

$$T_{р.зам} = \frac{1}{\lambda_A+\lambda_Б} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_Б-\lambda'_Б}\left(\frac{1}{\lambda'_Б} - \frac{1}{\lambda_A+\lambda_Б}\right) + \frac{1}{\lambda_A} - \frac{1}{\lambda_A+\lambda_Б} = \frac{1}{\lambda_A+\lambda_Б} + \frac{1}{\lambda'_Б(\lambda_A+\lambda_Б)} + \frac{\lambda_Б}{\lambda_A(\lambda_A+\lambda_Б)}. \quad (7.10)$$

Формула (7.10) является общей, позволяющей определить среднее время безотказной работы дублированной системы для любого способа включения резерва. Так, для нагруженного резерва, когда $\lambda_A = \lambda_Б = \lambda'_Б = \lambda$, формула (7.10) дает

$$T_{рез} = 1{,}5\frac{1}{\lambda} = 1{,}5T_0.$$

Здесь изменено обозначение среднего времени безотказной работы системы, поскольку нагруженный резерв характерен для постоянного резервирования.

Если применяется ненагруженный резерв, когда $\lambda_A = \lambda'_Б = \lambda$, а $\lambda_Б = 0$, то по формуле (7.10) получаем

$$T_{р.зам} = 2T_0.$$

Формула (7.9) получена для двух элементов, из которых один основной, другой резервный. Но используя изложенную здесь методику, можно получить формулу для случая m-кратного резервирования. С этой целью необходимо выписать, как это делалось и здесь, все возможные состояния (гипотезы), в которых может пребывать система из (m+1) параллельных цепей (элементов), и вероятность безотказной работы системы за заданный промежуток времени найти как сумму вероятностей благоприятных гипотез:

$$P_{р.зам}(t) = \sum_{i=0}^{m+1} p(H_i), \tag{7.11}$$

где $(m + 1)$ — число благоприятных гипотез, соответствующих случаю безотказной работы системы.

Среднее время безотказной работы системы определяется:

$$T_{р.зам} = \sum_{i=0}^{m+1} \int_0^{\infty} p(H_i) d\tau. \tag{7.12}$$

Определение вероятностей $p(H_i)$ при большом числе резервных цепей (элементов) приводит к большому объему вычислительной работы. Поэтому, имея в виду назначение этого материала, не будем заниматься более сложными случаями резервирования.

Лекция 8

Индивидуальное прогнозирование надежности на основе экстраполяции

Смысл индивидуального прогнозирования заключается в том, что по результатам наблюдений за каждым экземпляром ЭС делаются обоснованные выводы о его потенциальной надежности в течение срока эксплуатации в условиях действия случайных внешних факторов, начальных отклонений параметров и их изменений во времени.

Исследования реальных процессов изменения во времени параметров ЭС показывают, что, как правило, у таких процессов основная случайность определяется не наличием быстротечных отклонений, а медленно меняющимися монотонными тенденциями. Это дает возможность использовать в описании случайных процессов квазидетерминированные (КД) модели – неслучайные функции времени, зависящие от нескольких случайных аргументов $f_{\text{КД}}(t, \widetilde{a_0}, \widetilde{a_1}, \widetilde{a_2})$

Оценка значения прогнозируемого параметра

Индивидуальное прогнозирование экстраполяцией с оценкой значения прогнозируемого параметра заключается в подборе такой функции $f_{\text{кд}}$, чтобы вычисленная по ней оценка прогнозируемого параметра возможно меньше отклонялась от его фактического значения.

Выбор подходящей $f_{\text{кд}}$ производится по данным эксперимента, состоящего в испытании n экземпляров выборки в течение времени $t_{\text{пр}}$ и регистрации значений прогнозируемого параметра каждого из них в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{\text{пр}}$.

Результаты таких испытаний удобно представить в виде табл. 8.1.

В этой таблице приняты следующие обозначения:

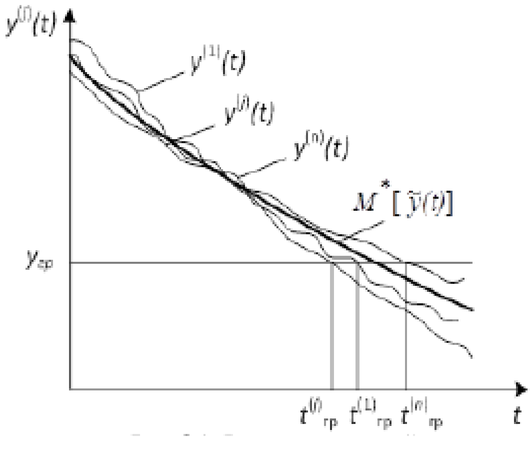
$y(t)$ – случайный процесс (изменение прогнозируемого параметра ЭС); $y^{(j)}(t_i)$ – значение прогнозируемого параметра j-го экземпляра, измеренное в момент времени t_i; $M^*\lceil\lfloor y(t_i)\rceil\rfloor$, $D^*\lceil\lfloor y(t_i)\rceil\rfloor$ – оценки математического ожидания и дисперсии случайного процесса в момент t_i, вычисленное по n его реализациям.

Таблица 8.1

Номер экспе-римента	Моменты времени регистрации прогнозируемого параметра						
	t_1	t_2	…	t_i	…	t_k	$t_{пр}$
1	$y^{(1)}(t_1)$	$y^{(1)}(t_2)$	…	$y^{(1)}(t_i)$	…	$y^{(1)}(t_k)$	$y^{(1)}(t_{пр})$
2	$y^{(2)}(t_1)$	$y^{(2)}(t_2)$	…	$y^{(2)}(t_i)$	…	$y^{(2)}(t_k)$	$y^{(2)}(t_{пр})$
…	…	…	…	…	…	…	…
j	$y^{(j)}(t_1)$	$y^{(j)}(t_2)$	…	$y^{(j)}(t_i)$	…	$y^{(j)}(t_k)$	$y^{(j)}(t_{пр})$
…	…	…	…	…	…	…	…
n	$y^{(n)}(t_1)$	$y^{n}(t_2)$	…	$y^{(n)}(t_i)$	…	$y^{(n)}(t_k)$	$y^{(n)}(t_{пр})$
$\boldsymbol{M^*[\tilde{y}(t)]}$	$M^*[\tilde{y}(t_1)]$	$M^*[\tilde{y}(t_2)]$	…	$M^*[\tilde{y}(t_i)]$	…	$M^*[\tilde{y}(t_k)]$	$M^*[\tilde{y}(t_{пр})]$
$\boldsymbol{D^*[\tilde{y}(t)]}$	$D^*[\tilde{y}(t_1)]$	$D^*[\tilde{y}(t_2)]$	…	$D^*[\tilde{y}(t_i)]$	…	$D^*[\tilde{y}(t_k)]$	$D^*[\tilde{y}(t_{пр})]$

Необходимо выбирать вид функции $f_{кд}$, вычислить для каждого j-го экземпляра коэффициенты $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$, $a_2^{(j)}$ и оценить значения прогнозируемого параметра – $y^{*(j)}(t_{пр})$.

Для этого, например, по данным табл.8.1 можно построить график



$M^*\lceil\lfloor y(t_i)\rceil\rfloor$. На рисунке эта зависимость показана жирной линией. По характеру ее изменения подбирается тот или иной вид функции $f_{КД}$.

Чаще всего реализация процессов изменения во времени параметров ЭС хорошо вписываются в простые модели (линейную, параболическую, логарифмическую, экспоненциальную), и гораздо реже возникает необходимость перехода к более сложным моделям.

Типовые математические модели

Линейная модель. В этом случае $f_{КД}$ есть линейная функция с двумя случайными коэффициентами.

$$\tilde{y}_{кд}(t) = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 t.$$

При $t=t_1=0$, $\tilde{y}_{КД}(t) = \tilde{a}_0$. Это означает, что $\tilde{a}_0$.есть значение случайного процесса $\tilde{y}(t)$ в начальный момент времени t_1 $\tilde{a}_0 = \tilde{y}(t_1)$

Линейные модели достаточно хорошо описывают процесс простого накопления необратимых изменений, например, механический износ.

Заметим, что в этой и всех последующих моделях коэффициент $\tilde{a}_0$ характеризует начальный разброс параметра. Если этот разброс невелик, то случайностью $\tilde{y}_{кд}(t) = a_0 - \tilde{a}_1 t$, где $a_0 = M[\tilde{y}(t_1)]$. коэффициента $\tilde{a}_0$ можно пренебречь. При этом модель упрощается, поскольку

Коэффициент $\tilde{a}_1$в линейной модели определяет скорость изменения процесса.

Параболическая модель. В общем случаи $f_{КД}$ здесь содержит три случайных коэффициента и имеет вид

$$\tilde{y}_{кд}(t) = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 t - \tilde{a}_2 t^2.$$

В некоторых практических случаях возможно упрощение параболической модели, если пренебречь $\tilde{a}_2$ (ускорения процесса) или $\tilde{a}_0$. Параболические модели используются, когда, кроме простого накопления необратимых изменений, имеются ускоряющие или замедляющие факторы.

Логарифмическая модель. В общем случаи $f_{КД}$ задается в виде

$$\tilde{y}_{кд}(t) = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 \ln(\tilde{a}_2 t + 1)$$

Такие модели используются для описания процессов старения материалов, у которых скорость старения убывает обратно пропорционально накопившимся в этих материалах изменениям. Обычно $\tilde{a}_2$ определяется физикой процесса старения и часто может рассматриваться как величина неслучайная.

Экспоненциальная модель. Обычно такая модель задается в виде

$$\tilde{y}_{кд}(t) = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 \left(1 - e^{-\tilde{a}_2 t}\right).$$

Экспоненциальная модель используется для описания процессов старения, являющихся результатом перехода материала из неравновесного состояния, возникающего при изготовлении, в равновесное. Такие модели наиболее адекватны реальным физическим процессам старения материалов. Величина $\tilde{a}_2$ имеет смысл «постоянной времени» деградации, которая определяется физикой процесса старения и во многих случаях может просматриваться как величина неслучайная.

Ознакомившись с различными КД моделями случайных процессов изменения во времени параметров ЭС, рассмотрим, какие возможности предоставляют эти модели для решения задач индивидуального прогнозирования.

Решение задач индивидуального прогнозирования

Пусть выбран какой-либо вид функциональной зависимости $f_{кд}$. Индивидуальность прогнозирования заключается в том, что для одного и того же выбранного вида $f_{кд}$ значения $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$ определяются в зависимости от конкретного хода j-й реализации, т.е. поведения прогнозируемого параметра j-го экземпляра. Задача, таким образом, заключается в нахождении значений коэффициентов $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$ для каждого экземпляра выборки.

Функцию $f_{КД}$ обычно подбирают так, чтобы $a_0^{(j)} = y^{(j)}(t_1)$. Поэтому для каждого j-го экземпляра остается найти коэффициенты $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$, для чего можно воспользоваться методом наименьших квадратов.

Суть этого метода заключается в нахождении таких $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений $y^{(j)}(t_i)$ прогнозируемого параметра от вычисленных по КД модели – $y^{*(j)}(t_i)$ была минимальной, то есть

$$\sum_{i=1}^{k}\left[y^{(j)}(t_i) - y^{*(j)}(t_i)\right]^2 \to \min,$$

где $y^{*(j)}(t_i) = f_{КД}(t, a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, a_2^{(j)})$

В результате имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\left[y^{(j)}(t_i) - f_{\text{кд}}\left(t, a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, a_2^{(j)}\right)\right]^2 \to \min.$$

Сумма в последнем выражении представляет собой функцию двух переменных $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$, обозначим ее $g(a_1^{(j)}, a_2^{(j)})$. Тогда

$$g\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left[y^{(j)}(t_i) - f_{\text{кд}}\left(t, a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, a_2^{(j)}\right)\right]^2.$$

Минимум этой функции достигается при таких $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$, при которых ее частные производные обращаются в нуль. Поэтому получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}\right)}{\partial a_1^{(j)}} = 0, \\ \dfrac{\partial g\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}\right)}{\partial a_2^{(j)}} = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений и дает нам искомые значения коэффициентов $a_1^{(j)}$ и $a_2^{(j)}$ для j-го экземпляра. Если система имеет несколько различных решений, то нужно выбрать из них такое, при котором сумма в выражении минимальна.

Ошибка прогнозирования

Оценка пригодности КД модели получается путем сравнения получаемой ошибки прогнозирования с допустимой. Точность прогнозирования оценивается величиной дисперсии ошибки, которая вычисляется по формуле

$$D\left[\tilde{y}(t_{\text{пр}})-\tilde{y}^*(t_{\text{пр}})\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta^{(j)}-\Delta\right)^2,$$

где $\Delta^{(j)}$ – отклонение вычисленного по КД модели на момент $t_{\text{пр}}$ значения y*($t_{\text{пр}}$) то фактического y($t_{\text{пр}}$), известного по результатам эксперимента (см. табл. 8.1); Δ – средняя ошибка КД модели.

$$\Delta=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta^{(j)}.$$

Оценка значения прогнозируемого параметра j-го экземпляра вычисляется по формуле

$$y^{*(j)}(t_{\text{пр}})=f_{\text{КД}}\left(t_{\text{пр}},a_0^{(j)},a_1^{(j)},a_2^{(j)}\right).$$

Если величина дисперсии ошибки согласуется с установленными требованиями, то полученную КД модель можно рекомендовать для прогнозирования значения параметра новых экземпляров; в противном случае следует попытаться подобрать другой вид функции $f_{\text{КД}}$, дающей меньшую ошибку.

Пример с линейной моделью

Покажем, как проводится индивидуальное прогнозирование экстраполяцией на основе эксперимента с использованием линейной КД модели.

Пусть в процессе эксплуатации 20 передатчиков производились замеры выходной мощности в начальный момент $t_1 = 0$, через $t_k = t_2 = 10^3$ ч и через $t_{\text{пр}} = t_3 = 10^4$ ч, результаты эксперимента приведены в столбцах 2, 3, 4 табл. 8.2.

Таблица 8.2

№ п/п	$y^{(j)}(t_1)$	$y^{(j)}(t_2)$	$y^{(j)}(t_3)$	$y^{(j)}(t_{пр})$	$k^{(j)}$	$a_1^{*(j)}10^{-3}$	$K^{*(j)}$	$\Delta^{(j)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	113,76	112,73	101,85	1	1,03	102,96	1	-1,61
2	95,73	94,74	83,95	2	0,99	85,33	1	-1,88
3	93,05	92,11	84,85	2	0,94	83,15	2	1,20
4	100,12	98,87	90,09	1	1,25	87,12	1	2,47
5	101,83	100,86	95,00	1	0,97	91,63	1	2,87
6	99,27	97,66	84,05	2	1,61	82,67	2	0,88
7	100,61	99,55	87,79	1	1,06	85,01	1	-2,22
8	100,12	98,64	87,12	1	1,48	84,82	2	1,80
9	96,46	94,79	80,56	2	1.67	79,26	2	0,80
10	107,07	106,46	102,50	1	0,61	100,47	1	1,53
11	100,12	99,18	88,63	1	0,94	90,22	1	-2,09
12	101,59	100,37	90,00	1	1,22	88,89	1	0,61
13	97,32	95,98	81,47	2	1,34	83,52	2	-2,45
14	96,34	95,53	87,18	1	0,81	87,74	1	-1,76
15	102,32	101,30	91,35	1	1,02	91,62	1	-0,77
16	102,19	101,48	91,34	1	0,71	94,59	1	-3,75
17	99,39	98,90	92,35	1	0,49	93,99	1	-2,14
18	95,36	94,50	85,09	1	0,86	86,26	1	-1,67
19	108,05	107,12	99,68	1	0,93	98,25	1	0,93
20	97,56	96,97	88,18	1	0,59	91,16	1	-3,48
$M^*[\tilde{y}(t)]$	100,41	99,39	89,65					
$D^*[\tilde{y}(t)]$	4,826	4,893	6,213					

В двух нижних строках табл. 8.2 приведены оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения, вычисленные для моментов t_1, t_2, $t_{пр}$.

Нетрудно убедиться, что эта зависимость очень близка к линейной, поэтому выбираем функцию $f_{кд}$ в виде

$$y^{*(j)}(t_{пр}) = a_0^{(j)} - a_1^{*(j)} t_{пр},$$

коэффициент $a_0^{(j)}$ равен $y^{(j)}(t_1)$, значит, известен по результатам эксперимента (столбец 2 табл. 8.2). Коэффициент $a_1^{*(j)}$ для каждого экземпляра обучающей выборки находится по формуле

$$a_1^{*(j)} = \frac{y^{(j)}(t_1) - y^{(j)}(t_2)}{t_2}.$$

Вычисленные по этой формуле значения $a_1^{*(j)}$ приведены в столбце 6.

В столбце 9 приведены отклонения $\Delta^{(j)}$ вычисленных по КД линейной модели значений от фактических, указанных в столбце 4.

Окончательно, оценка значения прогнозируемого параметра вычисляется по формуле $y^{*(j)}(t_{пр}) = a_0^{(j)} - a_1^{*(j)} t_{пр}$.

Значения этих оценок $y^{*(j)}(t_{пр})$ приведены в столбце 7.

Вычислим дисперсию ошибки и сравним ее с допустимым значением. В нашем примере дисперсия ошибки прогнозирования равна

$$D[\tilde{y}(t_{пр}) - \tilde{y}^*(t_{пр})] = 4{,}13,$$

или среднеквадратическое отклонение ошибки равно 2,03. Эффективность прогнозирования удобно оценивать величиной отношения $\sqrt{D[\tilde{y}(t_{пр})] / D[\tilde{y}(t_{пр}) - \tilde{y}^*(t_{пр})]}$.

В нашем примере оно равно 3,1, это означает, что применение индивидуального прогнозирования позволило в 3,1 раз улучшить точность оценки параметра по сравнению с прогнозированием по всей группе.
Если полученная точность прогнозирования удовлетворительна, то найденную КД модель можно рекомендовать для прогнозирования значения параметра новых экземпляров передатчиков.

Лекция 9

Выборочный контроль радиоизделий

Принципы статистической проверки гипотез

На практике мы всегда располагаем ограниченным числом значений случайной величины, представляющим собой некоторую **выборку** из генеральной совокупности. Под **генеральной совокупностью** понимают все допустимые значения случайной величины. Выборка называется **репрезентативной** (представительной), если она даёт достаточное представление об особенностях генеральной совокупности. Если о последней ничего не известно, единственной гарантией репрезентативности может служить случайный отбор.

Предложения относительно распределений генеральной совокупности той или иной случайной величины называются **статистическими гипотезами**. Проверка гипотезы заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей, **критериев проверки** (критериев значимости), вычисляемых по выборке, со значениями этих показателей, определёнными из предложения, что проверяемая гипотеза верна. При проверке гипотез некоторая гипотеза H_0 сравнивается с альтернативной гипотезой H , которая формулируется или подразумевается. Альтернативных гипотез может быть несколько.

Чтобы принять или отвергнуть гипотезу, ещё до получения выборки задаются **уровнем значимости** P, под которым понимается вероятность того, что случайная величина примет значение, выходящее за пределы **доверительного интервала**. Наиболее употребительны уровни значимости: 0,001; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1. Уровню значимости соответствует доверительная вероятность $\beta = 1 - P$. По этой вероятности, используя гипотезу о распределении оценки x^* (критерия значимости), находят квантильные доверительные границы, как правило, симметричные $\frac{x_p}{2}$ и $x_1 - \frac{p}{2}$. **Квантиль** x_p есть такое значение случайной величины X , при котором $P(X < x_p) = P$.

Числа $\frac{x_p}{2}$ и $x_1 - \frac{p}{2}$ называют **критическими значениями гипотезы**; значения x^*, меньше чем $\frac{x_p}{2}$ и больше $x_1 - \frac{p}{2}$, образуют критическую область гипотезы, или область непринятия гипотезы (рис. 9.1). Если найденное по выборке значение x_0 попадает между и $\frac{x_p}{2}$ и $x_1 - \frac{p}{2}$ то гипотеза допускает

такое значение в качестве случайного, поэтому нет оснований его отвергать.

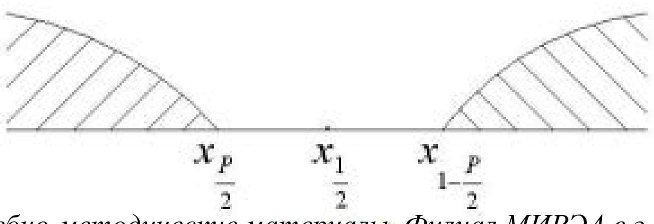


Рис. 9.1

Если же найденное значение x_0 попадает в критическую область, по данной гипотезе оно является практически невозможным. Но так как оно все-таки появилось, то гипотеза отвергается.

При проверке гипотез могут быть ошибки двух видов. **Ошибка первого рода** состоит в том, что отвергается гипотеза, которая на самом деле верна. Вероятность такой ошибки α не больше принятого уровня значимости. Например, при P = 0,05 можно совершить ошибку первого рода в среднем в пяти случаях из ста. **Ошибка второго рода** состоит в том, что гипотеза принимается, а на самом деле она неверна. Вероятность этой ошибки β тем меньше, чем выше уровень значимости, так как при этом увеличивается число отвергаемых гипотез. Одну и ту же статистическую гипотезу можно исследовать при помощи различных критериев значимости.

Если вероятность ошибки второго рода равна β, то 1 – β называют **мощностью критерия**.

На рис. 9.2 приведены две кривые плотности вероятности случайной величины X , соответствующие двум конкурирующим гипотезам $H(a)$ и $\overline{H}(\delta)$. Если из опыта получается значение $x > x_p$, отвергается гипотеза H и принимается альтернативная гипотеза H , и наоборот, если $x < x_p$. Площадь под кривой плотности вероятности, соответствующей справедливости гипотезы H, вправо от x_p равна уровню значимости P, т.е. вероятности ошибки первого рода. Площадь

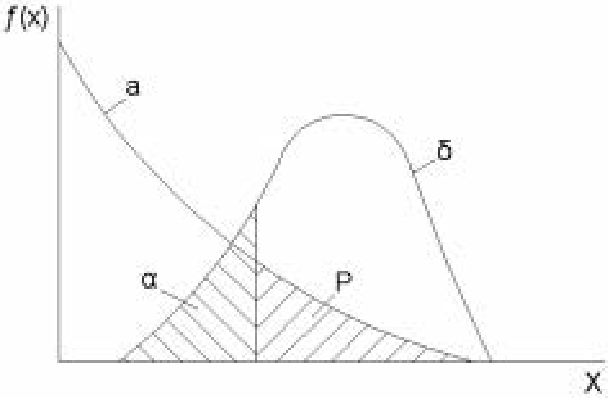


Рис. 9.2

под кривой вероятности $\overline{H}$, соответствующей справедливости, влево от x_p равна вероятности ошибка второго рода β, а вправо от x_p – мощности критерия. Таким образом, чем больше P, тем больше 1 – β. Для проверки гипотезы стремятся из всех возможных критериев выбрать тот, у которого при заданном уровне значимости меньше вероятности ошибки второго рода.

Рассмотренные принципы статистической проверки гипотез положены в основу выборочных методов контроля и испытаний ЭС.

Выборочные методы контроля ЭС

Выборочный контроль применяется, если сплошной контроль или невозможен, если связан с необходимостью уничтожения или порчи изделия (например, контроль надёжности), или экономически невыгоден из-за высокой его стоимости. Он заключается в том, что отбирается некоторое число изделий из данной партии и определяется качество каждого из них. По количеству или доле дефектных изделий в выборке судят о качестве всей продукции. Если результат испытания дает основание считать долю брака во всей партии, не превышающей некоторого допустимого предела, партия принимается. Если же результат отрицательный, то партия бракуется или подвергается сплошной проверке, причем все обнаруженные бракованные изделия заменяются годными.

Естественно, что из-за случайности выборки возможны ошибки при оценке всей партии изделий по выборочным характеристикам. Эти ошибки можно разделить на ошибки первого рода, когда годная партия изделий по результатам выборки оценивается как негодная, и ошибки второго рода, заключающиеся в том, что негодная партия продукции по результатам выборочных испытаний оценивается как годная. Вероятности этих ошибок называются рисками поставщика α и заказчика β. При организации статистического контроля стремятся, чтобы эти вероятности были достаточно малыми.

На практике применяются три метода выборочного контроля: однократной выборки, двукратной выборки и последовательного анализа.

Обозначим через N общее число изделий в партии, M – число имеющихся в ней дефектных изделий. Тогда характеристикой качества партии будет доля дефектных изделий: $q = \frac{M}{N}$.

Обозначим через P вероятность приёмки партии по результатам выборочного контроля. Эта вероятность зависит от величины q и плана контроля (объёма и числа выборок, их последовательности и т.д.). Если **условием приёмки** партии является выполнения соотношения $m \le C$, где m – число бракованных изделий в выборке; C – некоторое число, называемое **оценочным нормативом**, то вероятность P можно представить в виде

$$P = P(m \le C) = \sum_{m=0}^{C} P_m . \tag{9.1}$$

Вероятности P_m определяются в зависимости от закона распределения случайной величины – количества бракованных изделий в выборке – m, объёма партии N, числа дефектных изделий в партии M и объёма выборки n. Обычно применяется один из трех законов распределения – гипергеометрический, биномиальный и Пуассона.

Наиболее общим является гипергеометрическое распределение. Вероятность P при этом распределении определяется по формуле

$$P_m = \frac{C_m^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad (9.2)$$

где C_j^i – число сочетаний.

Если объём выборки n удовлетворяет условию $n < 0{,}1 \cdot N$, то применяется **биномиальное распределение**

$$P_m = C_n^m \cdot q^m \cdot p,^{n-m} \qquad (9.3)$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)}$, $q = \dfrac{M}{N}$, $p = 1 - q$.

Если выполняется также и условие $q < 0{,}1$, то используется **распределение Пуассона**

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e,^{-a} \qquad (9.4)$$

где $a = n \cdot q$.

Рассмотрим характеристику $P = f(q)$, показанную на рис. 9.3, которая называется **оперативной характеристикой** принятого плана контроля.

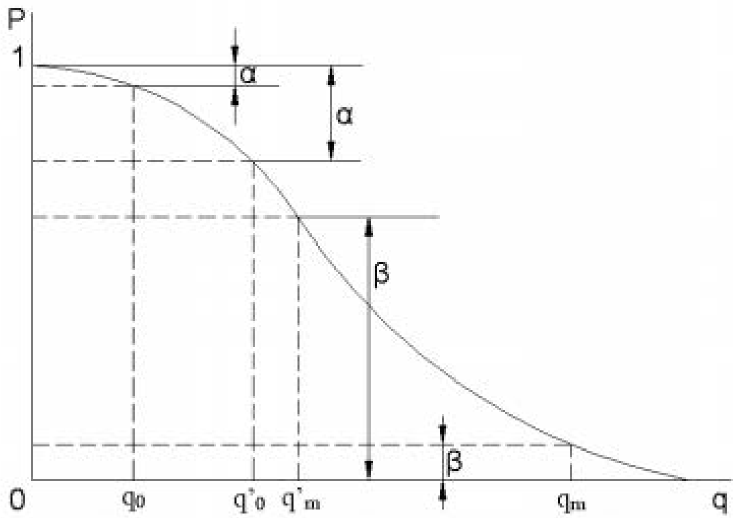


Рис. 9.3

Предположим, что если в партии M' бракованных изделий, то она считается годной, а если $M'+1$, то – негодной. В этом случае разница между $q'_0 = \dfrac{M}{N}$ n и $q'_m = \dfrac{M'+1}{N}$ будет незначительной, а риски поставщика α и заказчика β большие.

Для выхода из этого *Рис. 9.3* затруднения вводят три категории качества изделий:

- $M \le M_1$ $(q \le q_0)$ – хорошая продукция;
- $M_1 \le M \le M_2$ $(q_0 < q < q_m)$ – допустимая продукция;
- $M \ge M_2$ $(q \ge q_m)$ – брак.

Видно, что риск поставщика α в этом случае будет существенно снижен.

Граница продукции первой категории устанавливается исходя из уровня производства, граница третьей категории – из анализа применения и целевого назначения рассматриваемых изделий.

Из формул (9.1) – (9.4) нетрудно убедиться, что конкретный вид оперативной характеристики, а следовательно, и риск α и β зависит также от оценочного норматива C, объёмов партии N и выборки n. При организации выборочного контроля обычно необходимо найти объём выборки и оценочный норматив, которые обеспечивали бы заданные значения рисков заказчика и поставщика. Эта задача может быть решена при различных значениях n и C. Некоторой свободой в их выборе пользуются, чтобы обеспечить наиболее экономичный контроль. Будем считать, что партия, забракованная при выборочном контроле, подвергается сплошному контролю. Тогда среднее число контролируемых изделий можно найти по формуле

$$n_{Cp} = P \cdot n + (1 - P_0 N) = n \sum_{m=0}^{C} P_0 + (1 - \sum_{m=0}^{C} P_m)N. \tag{9.5}$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие n_{Cp} = min, то, решая уравнение (9.5), можно найти вполне определённую пару значений n и C. На вышеизложенных положениях основан метод однократной выборки.

Метод однократной выборки

При этом методе устанавливаются два контрольных параметра: объём выборки n и оценочный норматив C. Партия изделий принимается при условии $m \le C$

и бракуется при условии $m > C$.

Вероятности ошибок первого и второго рода записываются так:

$$\alpha = P(m > C) = \sum_{m=C+1}^{C} P_m \ \text{при} \ q = q_0, \tag{9.6}$$

$$\beta = P(m \le C) = \sum_{m=0}^{C} P_m \ \text{при} \ q = q_m, \tag{9.7}$$

Если известны величины α, β, q_0, q_m, N, то из уравнений (9.6) – (9.7), используя формулы (9.2) – (9.4), можно определить n и C.

Метод двукратной выборки

Устанавливается пять контрольных нормативов: объёмы выборок n_1, n_2 и оценочные параметры C_1, C_3, C_3. При этом $n_1 = n_2$ или $n_1 = 2n_2$ и

$$\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1}\right) C_1 < C_3 < \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1}\right) C_2.$$

Сначала делается выборка объёма n_1 и определяется параметр, например m_1. Если $m_1 \le C_1$, то партия изделий принимается, при $m_1 > C_2$ –

бракуется. Если $C_1 < m_1 \le C_2$, то делается повторная выборка объёмом n_2, по которой определяется выборочный параметр $m_1 + m_2$, являющийся функцией обеих выборок. При условии $m_1 + m_2 \le C_3$ партия принимается, иначе бракуется.

Риски α и β при методе двукратной выборки можно найти следующим образом:

$$\alpha = P[m_1 > C_2 \text{ или } C_1 < m_1 \le C_2 \text{ и } (m_1 + m_2) > C_3] \text{ при } M = M_1$$

$$\text{или } \alpha = \sum_{m_1 = C_2+1}^{n_1} P(m_1) + \sum_{m_1 = C_1+1}^{C_2} P(m_1) \sum_{m_1+m_2 = C_3+1}^{m_1+n_2} P(m_1+m_2), \tag{9.8}$$

$$\beta = P[m_1 \le C_2 \text{ или } C_1 < m_1 \le C_2 \text{ и } (m_1 + m_2) \le C_3] \text{ при } M = M_2$$

$$\text{или } \beta = \sum_{m_1 = 0}^{c_1} P(m_1) + \sum_{m_1 = C_1+1}^{C_2} P(m_1) \sum_{m_1+m_2 = m_1}^{C_3} P(m_1+m_2). \tag{9.9}$$

Метод последовательного анализа

При методе последовательного анализа в качестве критерия проверки используется **отношение правдоподобия**

$$\gamma = \frac{P_m(M_2)}{P_m(M_1)}, \tag{9.10}$$

где $P_m(M_1)$ и $P_m(M_2)$ – вероятности бракованных изделий в выборке из n изделий при $M = M_1$ и $M = M_2$ соответственно. На рис. 9.4 показаны многоугольники распределений случайной величины m при законе Пуассона для случаев, когда

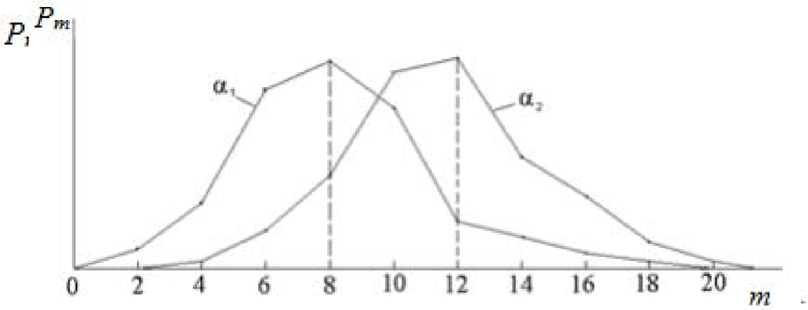


Рис. 9.4

$a_1 = n\frac{M_1}{N}$ и $a_2 = n\frac{M_2}{N}$ Видно, что если в выборке окажется 6 бракованных изделий, то $P_m(a_1) > P_m(a_2)$, и с большей вероятностью можно утверждать, что выборка сделана из партии, в которой M_1 бракованных изделий. Для этого случая выполняется соотношение $\gamma < 1$. Если окажется, что $m = 12$, то следует отдать предпочтение альтернативной гипотезе. В этом случае $\gamma > 1$.

Вальд обосновал следующую методику последовательного анализа, которая обеспечивает риски поставщика и потребителя, равные соответственно α и β. При испытаниях последовательно увеличивается n и для каждого нового значения n определяется γ по уравнению (9.10). Если выполняется неравенство

$$\gamma \le \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad (9.11)$$

то испытания прекращаются и партия изделий принимается. Если выполняется неравенство

$$\gamma \ge \frac{1-\beta}{\alpha}, \qquad (9.12)$$

то испытания прекращаются и партия изделий бракуется. При выполнении условия

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \gamma < \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad (9.13)$$

испытания следует продолжить до тех пор, пока не будут выполняться условия (9.11) или (9.12).

При законе Пуассона отношение правдоподобия имеет вид

$$\gamma = \frac{P_m(a_2)}{P_m(a_1)}, \qquad (9.14)$$

где $P_m(a_1)$ и $P_m(a_2)$ определяются по формуле (9.4), при $a_1 = nq_1$ и $a_2 = nq_2$.

Выражение (9.14) можно привести к виду: $\ln\gamma = nq_1 - nq_2 + m\ln\frac{q_2}{q_1}$

Если ввести обозначения $A = \ln\frac{\beta}{1-\alpha}$, $B = \ln\frac{1-\beta}{\alpha}$ то условия приёмки и браковки можно записать в виде

$$m' = \frac{A + nq_1\left(\frac{q_2}{q_1} - 1\right)}{\ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)} \ge m;\quad m'' = \frac{B + nq_1\left(\frac{q_2}{q_1} - 1\right)}{\ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)} \le m. \qquad (9.15)$$

Если заданы α, β, q_1, q_2, то уравнения (9.15) определяют линейную зависимость величин m' и m'', которая показана на рис. 9.5 для α = β = 0,1; q_1 = 0,05; q_2 = 0,1. Прямые m' и m'' разделяют плоскость на три зоны: приёмки III, браковки I и продолжения испытаний II.

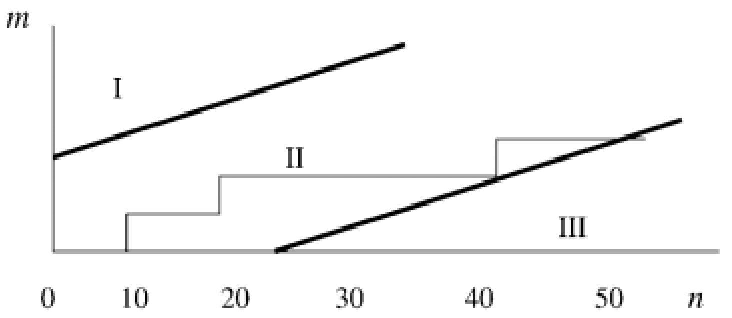


Рис. 9.5

Для контроля по этому методу нужно построить графики указанного типа для заданных значений α, β, q_1, q_2 и, делая последовательно малые выборки n, определять m.

Наносяя найденные точки на график, продолжать испытание, пока точка не окажется в зоне приёмки или браковки.

Список на используемые источники:

e.lib.vlsu.ru/bitstrim