

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, РАДИОТЕХНИКИ И  
ЭЛЕКТРОНИКИ  
МИРЭА

Е.И. ИСМАГИЛОВА

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ  
ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу «Дискретная математика»  
для студентов, обучающихся по направлениям  
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,  
11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств»,  
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

МОСКВА

МИРЭА

2015

УДК 519.1 (075)

ББК 22.176я73

И 87

*Утверждено редакционно-издательским советом МИРЭА в качестве учебного пособия для студентов*

Подготовлено на кафедре общенаучных дисциплин

Рецензенты: к.ф.-м.н. Т.А. Кузнецова, к.ф.-м.н. Ф.М. Сабирова

**Исмагилова Е.И.**

И 87 Булевы функции и построение логических схем: учебное пособие / Е.И. Исмагилова — М.: МИРЭА, 2015. — 160 с.

ISBN

Учебное пособие предназначено для студентов МИРЭА первого курса, изучающих дисциплину «Дискретная математика» и обучающихся по направлениям подготовки 09.03.01, 11.03.03, 11.03.04.

В пособии рассмотрены основы булевой алгебры, полнота систем булевых функций, минимизация нормальных форм, приложение булевой алгебры к синтезу логических схем. По каждой теме даны теоретические сведения (основные определения и теоремы), приведены подробно разобранные решения типовых задач, приложены задачи для самостоятельного решения.

Материал пособия позволяет самостоятельно разобраться не только в математической, но и в схемотехнической сущности булевых функций, выработать практические навыки необходимые для дальнейшего изучения специальных дисциплин.

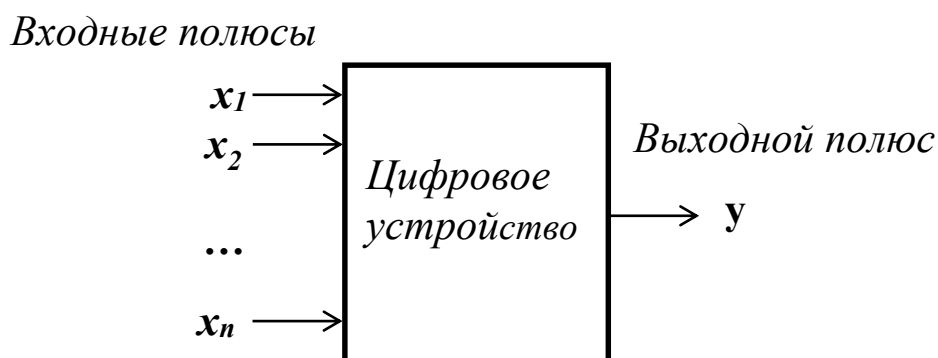
ISBN 978-5-7339-

© Исмагилова Е.И., 2015

© МИРЭА, 2015

Для описания алгоритмов работы цифровых устройств необходим соответствующий математический аппарат. Такой аппарат для решения задач формальной логики в середине прошлого века разработал ирландский математик Джорж Буль (1815 – 1864). Этот математический аппарат получил название булевой алгебры.

## 1. Интерпретация булевой функции



### 1.1. Обобщённая схема логического устройства.

Рассмотрим некоторое цифровое устройство (рис.1.1.), содержащее *входные полюсы*, на которые извне поступают сигналы, и *выходной полюс*, с которого снимают сигнал. Сигналы на полюсы поступают в виде высокого или низкого потенциала. Если высокому потенциалу поставить в соответствие 1, а низкому – 0, то каждый из полюсов цифрового устройства может находиться в одном из двух состояний (0 или 1). Чтобы различать входные и выходные полюсы, их упорядочивают и обозначают разными переменными. На рис.1.1. входные полюсы цифрового устройства обозначены  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , выходной -  $y$ . Введение переменных позволяет в любой момент времени каждой комбинации состояний входных полюсов поставить в соответствие  $n$ -разрядный набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , состоящий из нулей и единиц, а выходному полюсу соответствующий одноразрядный набор  $(y)$ .

**Определение 1.1.** Набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , называют *двоичным набором*, а его элементы  $x_i$  - *компонентами*.

Кратко набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обозначают  $\tilde{x}^n$  или  $\tilde{x}$ .

Чтобы описать поведение цифрового устройства, необходимо построить таблицу зависимости между входными и выходными двоичными наборами. Возникает вопрос: сколько строк и столбцов должна содержать эта таблица?

Чтобы определить количество строк, необходимо посчитать сколько существует всевозможных  $n$ -разрядных двоичных наборов  $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Для этого упорядочим наборы, присвоив им определённые номера.

**Определение 1.2.** Номер набора  $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – это число

$$v(\tilde{x}^n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 2^{n-i}.$$

В качестве примера упорядочим множество 3-х разрядных двоичных наборов  $\tilde{x}^3 = (x_1, x_2, x_3)$ .

Набор $\tilde{x}^3 = (x_1, x_2, x_3)$	Номер набора
(000)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$
(001)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$
(010)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$
(011)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$
(100)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$

(101)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$
(110)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$
(111)	$\sum_{i=1}^3 x_i \cdot 2^{3-i} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$

Всего 3-х разрядных двоичных наборов  $8 = 2^3$ .

**Утверждение 1.1.** На множестве  $\{0,1\}$  можно построить ровно  $2^n$  различных двоичных наборов длины  $n$ .

**Доказательство.** Проведём индукцию по длине набора  $n$ .

Для  $n = 1$  можно построить различных наборов из одной буквы  $2 = 2^1$ . При построении различных наборов из двух букв, для каждого набора из одной буквы существует ровно 2 возможности добавить одну букву в конец (рис.1.2). Поэтому различных наборов длины  $n = 2$  получаем  $2 \cdot 2 = 2^2$ .

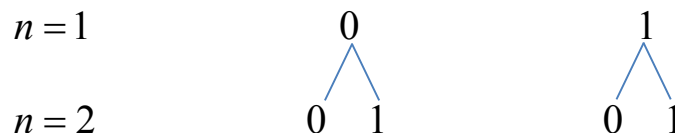


Рис.1.2. Построение различных наборов из двух букв на множестве  $\{0,1\}$ .

Предположим, что для наборов длины  $(n-1)$  утверждение выполняется, тогда существует ровно  $2^{n-1}$  различных наборов длины  $(n-1)$ . Для каждого набора длины  $(n-1)$  существует ровно 2 возможности добавить одну букву в конец. Так как наборов длины  $(n-1)$  всего  $2^{n-1}$ , то различных наборов длины  $n$  получится  $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ . Утверждение доказано.  $\square$

Теперь можно определить количество строк и столбцов в таблице, описывающей поведение цифрового устройства:

**количество строк =  $2^n$  + строка для заголовка,**

где  $2^n$  - количество  $n$ -разрядных двоичных наборов  $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

**количество столбцов = столбец для номера набора + количество входных переменных + столбец для выходной переменной.**

Получаем, что для цифрового устройства, представленного на рис.1.1, таблица 1.1, определяющая зависимость выходной переменной  $y$  от совокупности входных переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , имеет количество строк, равное  $(2^n + 1)$  и количество столбцов, равное  $(1 + n + 1) = n + 2$ .

Таблица 1.1.

№	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$y$
0	0	0	...	0	0	$\alpha_0$
1	0	0	...	0	1	$\alpha_1$
...	...	...	...	...	...	...
$2^n - 2$	1	1	...	0	1	$\alpha_{2^n - 2}$
$2^n - 1$	1	1	...	1	1	$\alpha_{2^n - 1}$

При построении таблицы 1.1:

- наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  выписываются в порядке возрастания их номеров (сверху вниз);
- через  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  ( $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ) обозначается значение выходной переменной  $y$  на  $i$ -ом наборе.

Построенная таблица 1.1 называется *таблицей истинности*.

Если обозначить через  $E_2 = \{0, 1\}$  – основное множество, а через  $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall i x_i \in E_2\}$  - множество всех  $n$ -

разрядных двоичных наборов, то таблица истинности описывает отображение множества  $B^n$  в множество  $E_2$ .

**Определение 1.3.** Отображение  $f(x_1, \dots, x_n): B^n \rightarrow E_2$  называется *всюду определённой булевой функцией* и записывается  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или  $y = f(\tilde{x}^n)$ .

Таким образом, поведение цифрового устройства (рис.1.1.) описывается булевой функцией  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 2. Логические элементы

**Определение 2.1.** Под *логическим элементом* будем понимать цифровое устройство, реализующее некоторую булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Для логического элемента введём условное графическое обозначение, которое показано на рис.2.1.



Рис. 2.1. Условное графическое обозначение логического элемента, реализующего булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Любой логический элемент характеризуется:

1) наличием одного или нескольких входов, на которые подаются входные сигналы (входные переменные);

2) наличием выхода, на котором формируется выходной сигнал (выходная переменная).

3) определённой булевой функцией  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая отображает зависимость выходного сигнала от входных сигналов.

### 3. Булевы функции

Множество всех булевых функций  $f(\tilde{x}^n)$  обозначают  $P_2$ . При этом обычно полагают, что  $n \geq 0$ .

Так как в таблице булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n \geq 1$ ) стандартное расположение наборов идёт в порядке возрастания их номеров (сверху вниз) (табл. 3.1.), то функцию  $f(\tilde{x}^n)$  удобно задать двоичным набором её значений  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$ , который обозначают  $\tilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$  или  $f(\tilde{x}^n) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$ .

Таблица 3.1.

№	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(\tilde{x}^n)$
0	0	0	...	0	0	$\alpha_0$
1	0	0	...	0	1	$\alpha_1$
...	...	...	...	...	...	...
$2^n - 1$	1	1	...	1	1	$\alpha_{2^n-1}$

По утверждению 1.1, количество различных двоичных наборов  $\tilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$  длины  $2^n$  равно  $2^{2^n}$ . Сколько существует различных двоичных наборов  $\tilde{\alpha}_f^{2^n}$ , столько и булевых функций, зависящих от  $n$  переменных. Поэтому число функций, зависящих от  $n$  переменных, равно  $2^{2^n}$ .

Булевы функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , зависящие от  $n$  переменных, называют  $n$ -местными.

#### **Нульместные булевы функции**

Число нульместных булевых функций равно  $2^{2^0} = 2$ . Этими функциями являются константы 0 и 1.



### Одноместные булевы функции

Число булевых функций от одной переменной равно  $2^{2^1} = 4$ . Обозначим эти функции через  $\varphi_j(x)$ , где  $j = 0, 1, 2, 3$ . В таблице 3.2 представлено множество всех булевых функций одной переменной.

Таблица 3.2.

$x$	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Описание множества булевых функций от одной переменной дано в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

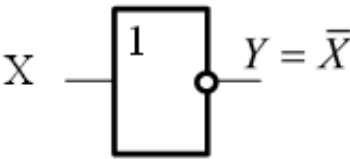
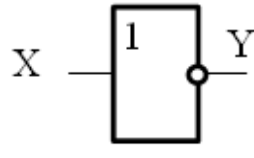
<b>№</b>	<b>Двоичный набор функции</b>	<b>Формула</b>	<b>Название функции</b>
1.	$\varphi_0(x) = (00)$	$\varphi_0(x) = 0$	Константа 0
2.	$\varphi_1(x) = (01)$	$\varphi_1(x) = x$	Тождественная функция
3.	$\varphi_2(x) = (10)$	$\varphi_2(x) = \bar{x}$	Инверсия (отрицание переменной $x$ , функция НЕ)
4.	$\varphi_3(x) = (11)$	$\varphi_3(x) = 1$	Константа 1

Если значения функции не зависят от значений переменной  $x$ , то говорят, что  $x$  – *фиктивная переменная*. Среди функций, зависящих от одной переменной  $\varphi_j(x)$ , переменная  $x$  является фиктивной для констант 0 и 1.

Для некоторых булевых функций существуют стандартные графические изображения логических элементов, которые называют *вентильями*.

Вентиль, реализующий инверсию, показан в таблице 3.4. В вентильях кружок на выходе применяется для обозначения инвертирования сигнала.

Таблица 3.4.

Название вентиля	Графическое обозначение	Пример реализуемой функции						
Инвертор НЕ		 $Y = \bar{X}$ <table border="1" data-bbox="1109 660 1292 761"> <tr> <td><math>\bar{X}</math></td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\bar{X}$	0	1	Y	1	0
$\bar{X}$	0	1						
Y	1	0						

### Двухместные булевы функции

Число булевых функций двух переменных равно  $2^{2^2} = 16$ .

Таблица 3.5.

$x_1$	$x_2$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В таблице 3.5 представлено множество всех булевых функций двух переменных, которые обозначены через  $f_i(x_1, x_2)$ , где  $i = 0, 1, \dots, 15$ . Описание этих функций дано в таблице 3.6.

Таблица 3.6.

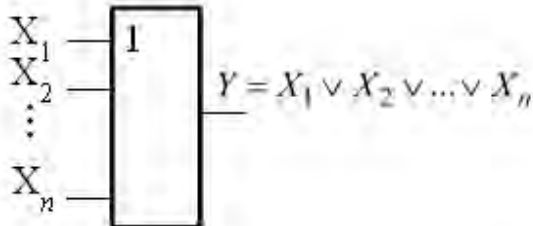
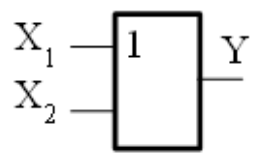
№	Двоичный набор функции	Формула	Название функции
1.	$f_0(x_1, x_2) = (0000)$	$f_0(x_1, x_2) = 0$ ( $x_1, x_2$ – фиктивные переменные)	Константа 0

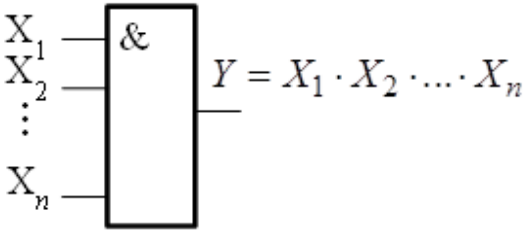
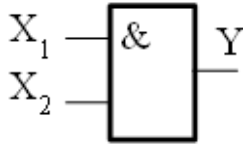
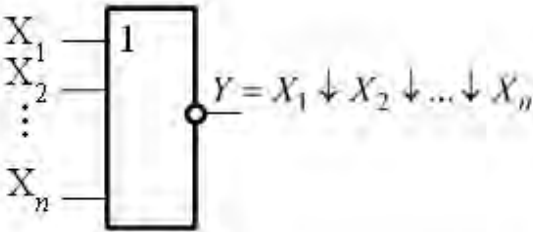
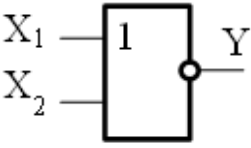
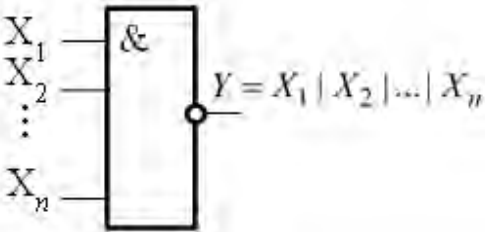
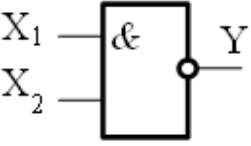
2.	$f_1(x_1, x_2) = (0001)$	$f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 =$ $= x_1 \cdot x_2 = x_1 \& x_2$	Конъюнкция (функция «И», логическое умножение)
3.	$f_2(x_1, x_2) = (0010)$	$f_2(x_1, x_2) = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$	Отрицание им- пликации «из $x_1$ следует $x_2$ »
4.	$f_3(x_1, x_2) = (0011)$	$f_3(x_1, x_2) = x_1$ ( $x_2$ – фиктивная пе- ременная)	Тождественная функция $x_1$
5.	$f_4(x_1, x_2) = (0100)$	$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$	Отрицание им- пликации «из $x_2$ следует $x_1$ »
6.	$f_5(x_1, x_2) = (0101)$	$f_5(x_1, x_2) = x_2$ ( $x_1$ – фиктивная пе- ременная)	Тождественная функция $x_2$
7.	$f_6(x_1, x_2) = (0110)$	$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$	Сумма по моду- лю 2 (неравно- значность)
8.	$f_7(x_1, x_2) = (0111)$	$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 =$ $= x_1 + x_2$	Дизъюнкция (функция «ИЛИ», логическое сло- жение)
9.	$f_8(x_1, x_2) = (1000)$	$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} =$ $= x_1 \downarrow x_2$	Стрелка Пирса (логическая функция «ИЛИ- НЕ»)
10.	$f_9(x_1, x_2) = (1001)$	$f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2 =$ $= x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$	Эквивалентность (равнозначность)
11.	$f_{10}(x_1, x_2) = (1010)$	$f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2} = \neg x_2$ ( $x_1$ – фиктивная пе- ременная)	Отрицание $x_2$

12.	$f_{11}(x_1, x_2) = (1011)$	$f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$	Импликация «из $x_2$ следует $x_1$ »
13.	$f_{12}(x_1, x_2) = (1100)$	$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1} = \neg x_1$ ( $x_2$ – фиктивная переменная)	Отрицание $x_1$
14.	$f_{13}(x_1, x_2) = (1101)$	$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$	Импликация «из $x_1$ следует $x_2$ »
15.	$f_{14}(x_1, x_2) = (1110)$	$f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2} = x_1   x_2$	Штрих Шеффера (логическая функция «И-НЕ»)
16.	$f_{15}(x_1, x_2) = (1111)$	$f_{15}(x_1, x_2) = 1$ ( $x_1, x_2$ – фиктивные переменные)	Константа 1

Далее будет показано, что операции дизъюнкция, конъюнкция, стрелка Пирса, штрих Шеффера, сумма по модулю 2 справедливы для произвольного числа переменных. Поэтому для данных операций в таблице 3.7 показаны вентили с  $n$  входами.

Таблица 3.7.

Основные типы логических вентиляей																	
Название вентиля	Условное графическое обозначение	Пример реализуемой функции															
<b>ИЛИ</b> дизъюнк- тор		 $Y = X_1 \vee X_2$ <table border="1" data-bbox="1061 1780 1348 1937"> <tr> <td><math>X_1</math></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>X_2</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>Y</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	$X_1$	0	0	1	1	$X_2$	0	1	0	1	$Y$	0	1	1	1
$X_1$	0	0	1	1													
$X_2$	0	1	0	1													
$Y$	0	1	1	1													

<p style="text-align: center;"><b>И</b> КОНЪЮНКТОР</p>		 $Y = X_1 \cdot X_2$ <table border="1" data-bbox="1066 495 1345 651"> <tbody> <tr> <td>X<sub>1</sub></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>X<sub>2</sub></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	X <sub>1</sub>	0	0	1	1	X <sub>2</sub>	0	1	0	1	Y	0	0	0	1
X <sub>1</sub>	0	0	1	1													
X <sub>2</sub>	0	1	0	1													
Y	0	0	0	1													
<p style="text-align: center;"><b>ИЛИ-НЕ</b></p>		 $Y = X_1 \downarrow X_2 = \overline{X_1 \vee X_2}$ <table border="1" data-bbox="1066 965 1345 1122"> <tbody> <tr> <td>X<sub>1</sub></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>X<sub>2</sub></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	X <sub>1</sub>	0	0	1	1	X <sub>2</sub>	0	1	0	1	Y	1	0	0	0
X <sub>1</sub>	0	0	1	1													
X <sub>2</sub>	0	1	0	1													
Y	1	0	0	0													
<p style="text-align: center;"><b>И-НЕ</b></p>		 $Y = X_1   X_2 = \overline{X_1 \cdot X_2}$ <table border="1" data-bbox="1066 1447 1345 1603"> <tbody> <tr> <td>X<sub>1</sub></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>X<sub>2</sub></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	X <sub>1</sub>	0	0	1	1	X <sub>2</sub>	0	1	0	1	Y	1	1	1	0
X <sub>1</sub>	0	0	1	1													
X <sub>2</sub>	0	1	0	1													
Y	1	1	1	0													

<p>Сумматор по модулю 2</p>		 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>X<sub>1</sub></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>X<sub>2</sub></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	X <sub>1</sub>	0	0	1	1	X <sub>2</sub>	0	1	0	1	Y	0	1	1	0
X <sub>1</sub>	0	0	1	1													
X <sub>2</sub>	0	1	0	1													
Y	0	1	1	0													

Для краткости, в названии вентиля принято писать число, равное количеству входов в вентиль, например, «3ИЛИ» означает, что логический элемент «ИЛИ» имеет три входа.

Число булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, равно  $2^{2^n}$ . Используя этот факт, можно получить оценку числа функций от 10 переменных. Всего таких функций будет

$$2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{1000} = (2^{10})^{100} > 1000^{100} = 10^{300}.$$

Таким образом, при росте числа переменных число функций возрастает очень быстро и их табличное задание становится неудобным.

#### 4. Равенство функций

В обычной алгебре справедливо равенство  $x + y - y = x$ , несмотря на то, что в левой части записана функция от двух переменных, а в правой - от одной. Для функции от двух переменных  $(x + y - y)$  переменная  $y$  является фиктивной, так как она не влияет на значения этой функции. Поэтому функции от разного числа переменных ведут себя одинаково и их можно приравнять.

Аналогичные ситуации встречаются и среди булевых функций. Например, тождественные функции  $f_3(x_1, x_2) = x_1$  из таблицы 3.6, где  $x_2$  - фиктивная переменная, и  $\varphi_1(x_1) = x_1$  из таблицы 3.3 ведут себя одинаково. Возникает вопрос: можно ли их приравнять?

Чтобы ввести понятие равенства булевых функций дадим формальные определения *существенных* и *фиктивных переменных*.

**Определение 4.1.** Переменная  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) булевой функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  называется *существенной*, если можно указать двоичные наборы  $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ , отличающиеся лишь по одной  $i$ -й компоненте, такие что  $f(\tilde{\alpha}^n) \neq f(\tilde{\beta}^n)$ . В противном случае переменная  $x_i$  называется *фиктивной* переменной функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

**Определение 4.2.** Двоичные наборы

$\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ , отличающиеся только по одной  $i$ -й компоненте, называют *соседними*.

Если  $x_i$  является фиктивной переменной для функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , то её можно удалить из таблицы истинности данной функции. Для этого вычёркиваются все строки, соответствующие двоичным наборам вида  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , а затем столбец переменной  $x_i$ . В результате получается таблица истинности для некоторой новой функции

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Будем говорить, что функция  $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  получена из функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  путём *удаления фиктивной переменной*  $x_i$ .

Отметим, что при удалении фиктивной переменной  $x_i$  таблица истинности для функции  $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  не изменится, если вместо строк, соответствующих наборам  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , вычеркнуть строки, соответствующие наборам  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Аналогично можно ввести и обратную операцию, получить из функции  $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  функцию  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  путём добавления фиктивной переменной  $x_i$ . В этом случае значение функции  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  на любом наборе находится из равенств:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

В дальнейшем не будем различать функции, получающиеся друг из друга добавлением или удалением фиктивных переменных.

**Определение 4.3.** Две функции алгебры логики называются *равными*, если одну из них можно получить из другой путём добавления или изъятия любого числа фиктивных переменных.

**Пример 4.1.** Для данной функции  $f(x, y, z) = (1010 \ 1010)$ :

- 1) выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие – фиктивными;
- 2) выразить  $f(x, y, z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

**Решение.**

1. Запишем таблицу истинности функции  $f$ .

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Количество строк и столбцов в таблице вычисляются по формулам:



**количество строк =  $2^n$  + строка для заголовка,**

где  $n$  - количество переменных, т.е.  $2^3 + 1 = 9$ ;

**количество столбцов = количество переменных + столбец значений функции,**

т.е.  $3 + 1 = 4$ .

Так как в таблице истинности булевой функции наборы выписываются в порядке возрастания их номеров, то в дальнейшем столбец с номерами наборов в таблицу включать не будем.

**2.** Рассмотрим пары соседних наборов отличающихся по переменной  $x$  и значения функции на этих наборах:

$$f(0,0,0) = f(1,0,0) = 1; \quad f(0,0,1) = f(1,0,1) = 0;$$

$$f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1; \quad f(0,1,1) = f(1,1,1) = 0.$$

Значит,  $x$  - фиктивная переменная.

Рассмотрим пары соседних наборов отличающихся по переменной  $y$ . Так как

$$f(0,0,0) = f(0,1,0) = 1; \quad f(0,0,1) = f(0,1,1) = 0;$$

$$f(1,0,0) = f(1,1,0) = 1; \quad f(1,0,1) = f(1,1,1) = 0,$$

то  $y$  - фиктивная переменная.

Рассматривая пары соседних наборов отличающихся по переменной  $z$ , находим, что  $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$ , поэтому  $z$  - существенная переменная.

**3.** Вычёркиваем из таблицы истинности для функции  $f(x, y, z)$  строки, соответствующие двоичным наборам вида  $(0, y, z)$  и столбец переменной  $x$ :

$y$	$z$	$\varphi(y, z)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Функция  $\varphi(y, z)$  получена из функции  $f(x, y, z)$  путём удаления фиктивной переменной  $x$ , поэтому  $f(x, y, z) = \varphi(y, z)$ .

Так как  $y$  - фиктивная переменная, то вычёркиваем из полученной таблицы для функции  $\varphi(y, z)$  строки, соответствующие двоичным наборам вида  $(0, z)$  и столбец переменной  $y$ :

$z$	$g(z)$
0	1
1	0

Из таблицы для функции  $\varphi(y, z)$  получили таблицу функции  $g(z)$ , формула которой  $g(z) = \bar{z}$ .

Так как  $f(x, y, z) = \varphi(y, z) = g(z)$ , то  $f(x, y, z) = \bar{z}$ .

**Пример 4.2.** Для функции  $g(x, y) = x \cdot y$ , которая существенно зависит от обеих переменных, построить функцию  $f(x, y, z)$ , которая получается из  $g(x, y)$  введением фиктивной переменной  $z$ .

**Решение.** Таблица функции  $g(x, y)$  имеет вид:

$x$	0	0	1	1
$y$	0	1	0	1
$g$	0	0	0	1

Таблица истинности функции  $f(x, y, z)$  получается из таблицы истинности функции  $g(x, y)$  следующим образом: на наборах  $(x, y, 0)$  определяем значения функции  $f(x, y, z)$  формулой  $f(x, y, 0) = g(x, y)$ , а на наборах  $(x, y, 1)$  - формулой  $f(x, y, 1) = \bar{g}(x, y)$ . Строим таблицу истинности:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	0	0	0	0	0	0	1	1

Получили  $f(x, y, z) = (00000011)$ .

#### 4.1. Графическая интерпретация фиктивной переменной

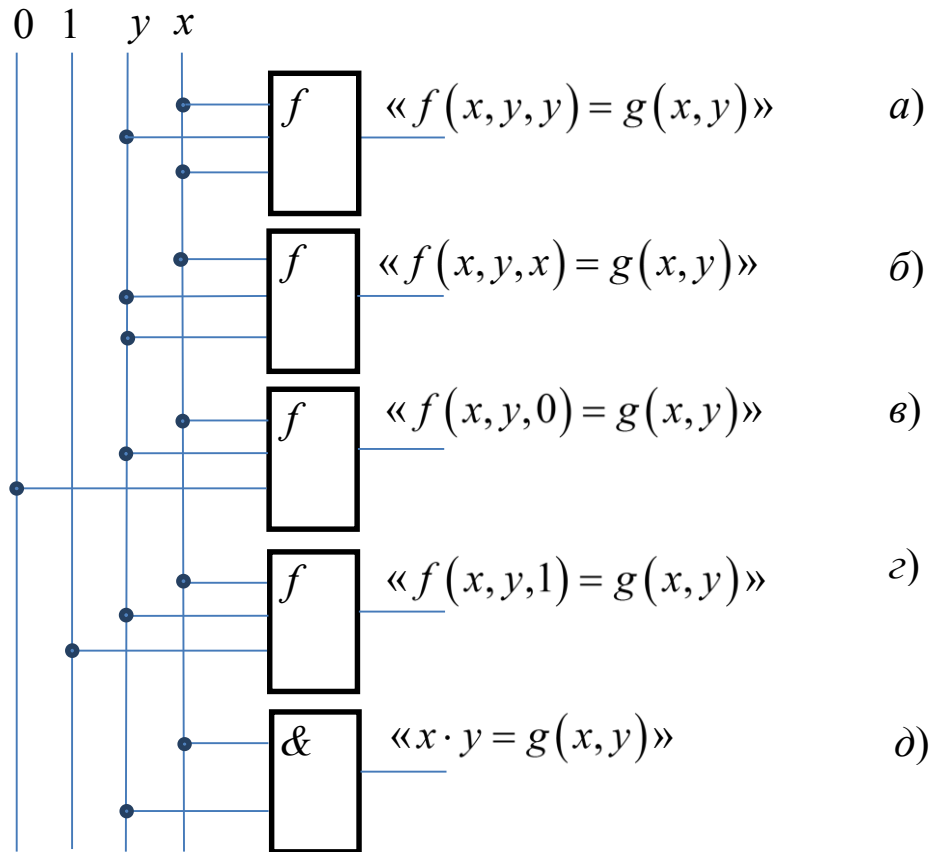


Рис. 4.1.1. Способы реализации функции  $g(x, y)$  на логическом элементе функции  $f(x, y, z)$  и вентиле «2И».

Логическому элементу соответствует определённая функция, которая отображает зависимость выходного сигнала от входных сигналов. Наличие фиктивной переменной означает, что существует вход логического элемента, на который подаются входные сигналы, не влияющие на формирование выходного сигнала. Например, логический элемент функции  $f(x, y, z)$  из примера 4.2 содержит вход, соответствующий фиктивной переменной  $z$ . К этому входу можно подключать как сигналы соответствующие переменным  $x$  или  $y$  (рис.4.1.1 а), б)), так и сигналы соответствующие

ющие константам 0 или 1 (рис.4.1.1 в), з)). Таким образом, наличие у логических элементов входов, соответствующих фиктивным переменным, позволяет использовать логические элементы с большим количеством входов в качестве логических элементов с меньшим количеством входов.

Для функций  $g(x, y)$  и  $f(x, y, z)$  из примера 4.2 на рис. 4.1.1 показаны способы реализации функции  $g(x, y)$  на вентиле «2И» (4.1.1 д)) и логическом элементе функции  $f(x, y, z)$ , у которой  $z$  - фиктивная переменная (рис.4.1.1 а), б), в), з)).

## 5. Основные эквивалентности для элементарных функций

Дадим индуктивное определение формулы над множеством.

**Определение 5.1.** Пусть имеется некоторое множество булевых функций  $A = \{f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots), \dots\}$ .

Введём понятие формулы над  $A$ :

1) любая функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in A$  называется формулой над  $A$ ;

2) если  $f(x_1, \dots, x_n) \in A$  и  $H_1, H_2, \dots, H_m$  — либо переменная, либо формула над  $A$ , то выражение вида  $f(H_1, H_2, \dots, H_n)$  является также формулой над  $A$ ;

3) только те объекты называются формулами над  $A$ , которые можно построить с помощью пунктов 1 и 2 данного определения.

**Примечание.** Среди  $H_1, H_2, \dots, H_n$  вполне могут быть одинаковые переменные или формулы.

**Определение 5.2.** Две формулы  $H_1$  и  $H_2$  над  $A$  называются *равными* или *эквивалентными*, если функции, реализуемые ими, равны. Записывают  $H_1 = H_2$ .

**Пример 5.1.** Доказать эквивалентность формул:

$$x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3).$$

**Решение.** Составим таблицы истинности функций  $f_1 = x_1 \vee (x_2 \cdot x_3)$  и  $f_2 = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$(x_2 \cdot x_3)$	$f_1$	$(x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \vee x_3)$	$f_2$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Сравнивая полученные двоичные наборы значений функций  $f_1$  и  $f_2$ , видим, что им соответствует один и тот же набор (0001 1111). Следовательно,  $f_1 = f_2$  и формулы эквивалентны  $x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$ .

Доказательства основных эквивалентностей, представленных ниже, проводятся так же, как показано в примере 5.1.

### Основные эквивалентности

#### 1. Коммутативность:

а)  $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ ;

б)  $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ ;

в)  $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ ;

г)  $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_2 \leftrightarrow x_1$ .

#### 2. Ассоциативность:

а)  $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ ;

б)  $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ;

в)  $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ .

#### 3. Дистрибутивность:

а)  $x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$ ;

б)  $x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$ ;

в)  $x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3$ .

#### 4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$ .

Теорема двойственности (правила де Моргана):

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2};$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}.$$

**5. Законы поглощения:**

а)  $x \cdot x = x \cdot 1 = x \vee x = x \vee 0 = x \oplus 0 = x;$

б)  $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = x \rightarrow x = 1;$

в)  $x \cdot \overline{x} = x \cdot 0 = x \oplus x = 0;$

г)  $x \oplus 1 = x \rightarrow 0 = x \leftrightarrow 0 = x | x = x \downarrow x = \overline{x}.$

Свойства констант 0 и 1:  $\overline{0} = 1; \overline{1} = 0.$

**6.**

а)  $x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2};$

б)  $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2};$

в)  $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 = ((x_1 \cdot x_2) \oplus x_1) \oplus 1;$

г)  $x_1 \oplus x_2 = (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2});$

д)  $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \cdot x_2) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = \overline{x_1 \oplus x_2} = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}).$

Все эти равенства остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и, следовательно, любых формул, представляющих эти функции.

Например, в формулах, получающихся многократным применением операции дизъюнкция к более простым формулам, по свойству ассоциативности скобки можно опускать, а по свойству коммутативности переменные можно переставлять, например,

$$x_1 \vee (x_2 \vee \dots \vee (x_{n-1} \vee x_n) \dots) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n.$$

Таким образом, операция дизъюнкция справедлива для произвольного числа переменных и верна запись  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n.$

Аналогично показывается, что для произвольного числа переменных справедливы операции конъюнкция, сумма по модулю 2, стрелка Пирса и штрих Шеффера, т.е. верны выражения:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n;$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n;$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n;$$

$$x_1 | x_2 | \dots | x_n.$$

Введём некоторые соглашения для записи формул:

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^n x_i;$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \big\& x_i;$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Из законов поглощения вытекают следующие очевидные утверждения:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall i (x_i = 1);$$

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = 1 \Leftrightarrow \exists i (x_i = 1).$$

Для установки порядка выполнения операций в формулах используются скобки. Для упрощения записи формул устанавливают *приоритет выполнения операций*. Приоритет применения операций убывает в следующем порядке:

$$\{\neg, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow\}.$$

Приоритетность операций в сочетании с законами ассоциативности дают возможность более компактной записи формул. Например,

$$\overline{(x_1 \rightarrow x_2)} \leftrightarrow \overline{((x_2 \cdot x_3) \vee \bar{x}_1)} = \overline{x_1 \rightarrow x_2} \leftrightarrow x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1.$$

Наряду с основными соотношениями для упрощения формул часто используются следующие правила:

**7. Правила поглощения:**

а)  $x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1;$

б)  $x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1.$

**8. Правила склеивания:**

а)  $x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1;$

б)  $(x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \vee x_2)} = \overline{x_1 \vee x_2}.$

**9. Правило обобщённого склеивания:**

$$x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}.$$

**Пример 5.2.** Построить таблицу булевой функции, заданной формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1}.$$

**Решение.**

1. Установим порядок выполнения операций в соответствии с их приоритетностью:

$$f_1 = \overline{x_1}; f_2 = x_2 \cdot x_3; f_3 = f_2 \vee f_1; f = x_1 \rightarrow f_3.$$

Таким образом, количество операций, необходимых для получения векторного значения функции, равно четырём.

2. Определим количество строк в таблице:

$$\text{количество строк} = 2^n + \text{строка для заголовка},$$

где  $n$  - количество переменных. В нашем случае имеем:  $2^3 + 1 = 9$ .

3. Определим количество столбцов в таблице:

$$\text{количество столбцов} = \text{количество переменных} + \text{количество операций},$$

т.е.  $3 + 4 = 7$ .

4. Выпишем в таблицу, заполнив столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учётом таблиц истинности основных логических операций:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Итак, исходная формула задаёт булеву функцию, имеющую двоичный набор значений  $f(x_1, x_2, x_3) = (1111\ 0001)$ .



## 6. Графическая интерпретация некоторых эквивалентностей

### Законы поглощения

Законы поглощения позволяют использовать логические элементы с большим количеством входов в качестве логических элементов с меньшим количеством входов. Как говорят, уменьшить число входов логического элемента.

Применение законов  $x \cdot 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$  для уменьшения числа входов разберём на примере вентиля «3И», т.к. для логических элементов дизъюнкции и суммы по модулю 2 эти операции проводятся аналогично.

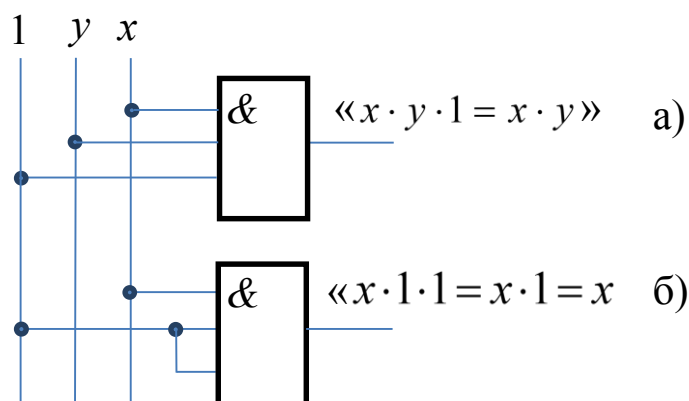


Рис. 6.1. Реализация на вентиле «3И» вентиля «2И» и логического элемента тождественной функции на один вход.

Формула  $x \cdot 1 = x$  позволяет из вентиля «3И» получить:

- вентиль «2И», подключением неиспользуемого входа вентиля «3И» к единице (источнику питания) (рис.6.1 а));
- логический элемент тождественной функции на один вход, подключением двух неиспользуемых входов вентиля «3И» к единице (рис.6.1 б)).

Законы  $x \cdot 1 = x$  и  $x \cdot 0 = 0$  могут быть полезны при построении коммутаторов на вентиле «2И» (рис.6.2), так как подавая на один из входов вентиля «2И» логический ноль или единицу можно либо пропускать сигнал на выход, либо формировать на выходе нулевой потенциал.

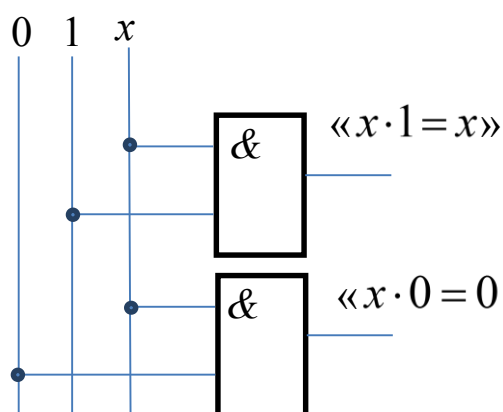


Рис. 6.2. Реализация на вентиле «2И» коммутаторов.

Законы  $x \cdot x = x \vee x = x$  и  $x | x = x \downarrow x = \bar{x}$  позволяют объединять входы логических элементов. Например, применяя формулу  $x | x | y = x \cdot x \cdot y = x \cdot y = x | y$  можно реализовать двухвходовую схему "2И-НЕ" на логическом элементе "3И-НЕ", как это показано на рис. 6.3 а). Использовать схему "2И-НЕ" в качестве обычного инвертора, как это показано на рис. 6.3 б), позволяет равенство  $x | x = x \cdot x = x$ .

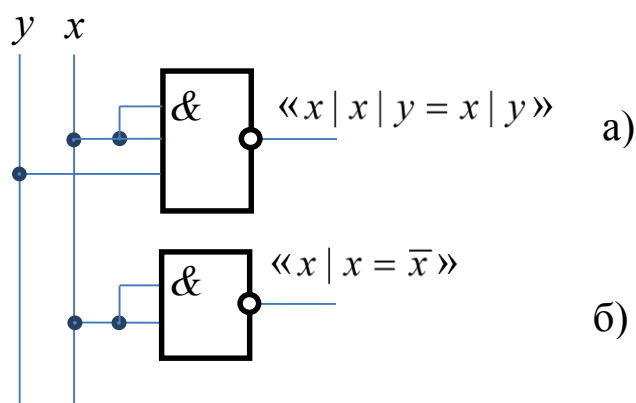


Рис. 6.3. Реализация «2И-НЕ» на вентиле «3И-НЕ» и построение логического элемента «НЕ» на вентиле «2И-НЕ».

Обратим внимание на то, что по правилам Кирхгофа объединение нескольких входов увеличивает входные токи логического элемента и его ёмкость, что увеличивает ток потребления предыдущих элементов и отрицательно сказывается на быстродействии

цифровой схемы в целом. Поэтому при проектировании цифровых схем стараются избегать таких ситуаций, подключая к лишним входам константы 0 или 1, например, применяя формулы  $x \cdot 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$  и  $x|1 = x \downarrow 0 = x \oplus 1 = \bar{x}$ .

### Правила де Моргана

Эти законы позволяют реализовать булеву функцию «И» при помощи логических элементов «ИЛИ» и, наоборот, реализовать булеву функцию «ИЛИ» при помощи логических элементов «И». Такая реализация особенно полезна в ТТЛ схемотехнике (транзисторно-транзисторная логика), так как там легко произвести логические элементы «И», но при этом достаточно сложно изготовить логические элементы «ИЛИ».

На рисунке 6.4 а) показано построение логического элемента «2ИЛИ» на элементе «2И-НЕ» и двух инверторах при помощи формулы  $\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1} \vee \overline{\bar{x}_2} = x_1 \vee x_2$ .

На рис. 6.4 б) дана схема логического элемента "2И", построенного при помощи формулы  $\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = x_1 \cdot x_2$  на логическом элементе «2ИЛИ» и инверторов на входе и выходе этой схемы.

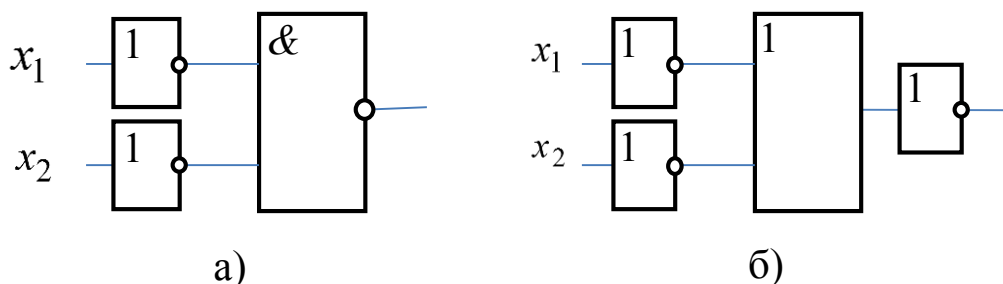


Рис. 6.4. Элемент «2ИЛИ», построенный на вентиле «2И-НЕ» и двух инверторах; элемент «2И», реализованный на вентиле «2ИЛИ» и трёх инверторах.

Правила де Моргана обобщаются на  $n$  переменных:

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n};$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}.$$

### **Закон двойного отрицания**

Закон двойного отрицания  $\overline{\overline{x}} = x$  используется как для упрощения логических выражений (и как следствие упрощения и удешевления цифровых комбинационных схем), так и для устранения инверсии сигналов после таких логических элементов как «2И-НЕ» и «2ИЛИ-НЕ». В этом случае законы булевой алгебры позволяют реализовывать заданные цифровые схемы при помощи ограниченного набора логических элементов.

## **7. Логические схемы**

**Определение 7.1.** Логическая схема (ЛС) представляет собой совокупность логических элементов и связей между ними.

Соединения логических элементов (ЛЭ) в рамках единой логической схемы должны удовлетворять следующим правилам:

**1.** К любому входу ЛЭ могут быть подключены:

- а) выход любого другого ЛЭ;
- б) входной сигнал (входная переменная), принимающий значения «0» или «1»;
- в) логическая константа (0 или 1).

В реальных электронных схемах подача логической константы на вход элемента реализуется либо заземлением, либо подключением этого входа через резистор к шине питания.

**2.** Выход любого ЛЭ схемы может:

- а) подключаться к любому числу входов других ЛЭ;
- б) представлять собой выходной сигнал схемы;
- в) принимать значения только «0» или «1».

**3.** Никакие два выхода логических элементов нельзя соединять вместе.

Логические схемы целесообразно строить и изображать по ярусам (каскадам). На рис. 7.1 показан пример ЛС для функции двух переменных  $f(x, y) = x\overline{y} \vee \overline{x}y$ .

Ярусное строение произвольной ЛС сводится к следующему:

- **1-й** ярус содержит ЛЭ, входы которых являются входами всей схемы;

- 2-й ярус образуют ЛЭ, к входам которых подключаются в общем случае входы схемы и выходы элементов 1-го яруса;
- $i$ -й ярус образуют ЛЭ, к входам которых подключаются выходы элементов предыдущих ярусов  $i-1, \dots, 1$ , а также входы схемы.

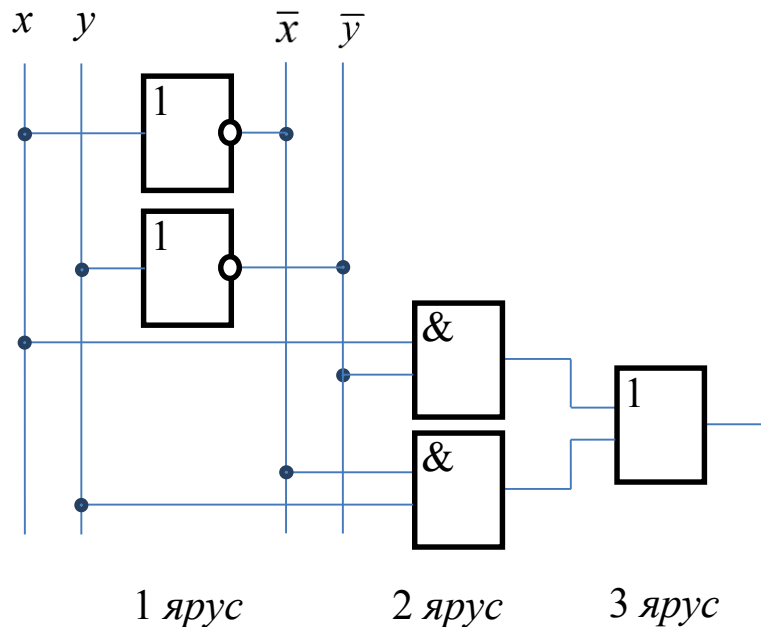


Рис. 7.1. Трёхъярусная логическая схема.

Основными параметрами логических схем являются быстродействие и стоимость.

Быстродействие схемы оценивается задержкой распространения сигналов от входов схемы к её выходу. Эту задержку принято считать в виде:

$$T = k\tau,$$

где  $\tau$  - задержка на одном логическом элементе,  $k$  - максимальное количество логических элементов, через которые проходит сигнал от входов к выходу.

Чтобы найти значение числа  $k$  все элементы логической схемы распределяются по ярусам, так как максимальное количество логических элементов, через которые проходит сигнал от входов к выходу, совпадает с числом ярусов схемы. Номер яруса элемента, на выходе которого формируется выходной сигнал схемы, равен  $k$ .

Цена логической схемы определяется в смысле Квайна ( $S_Q$ ). При этом подсчитывается общее число входов логических элементов.

Для схемы на рис.7.1. задержка -  $T = 3\tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=8$ .

**Пример 7.1.**

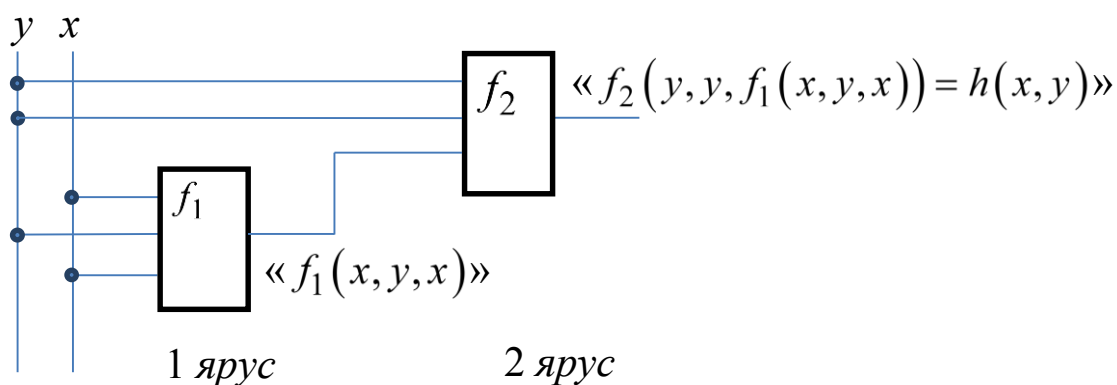
1. Построить логическую схему, реализующую функцию  $h(x,y) = f_2(y,y,f_1(x,y,x))$  при помощи логических элементов функций  $f_1$  и  $f_2$ . Для схемы найти задержку и цену по Квайну.

2. Написать таблицу функции  $h(x,y)$ , являющейся суперпозицией функций  $f_1$  и  $f_2$ , если  $h(x,y) = f_2(y,y,f_1(x,y,x))$ ,  $f_1(x,y,z) = (1001\ 0111)$  и  $f_2(x,y,z) = (0110\ 1010)$ .

3. Выразить  $h(x,y)$  формулой.

**Решение.**

1. Логическая схема, реализующая функцию  $h(x,y)$ , показана на рис.7.2.



.Рис. 7.2. Логическая схема, реализующая функцию  $h(x,y)$  при помощи логических элементов функций  $f_1$  и  $f_2$ .

Для схемы на рис.7.2 задержка -  $T = 2\tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=6$ .

2. Запишем таблицу функций  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$ :

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_1$	1	0	0	1	0	1	1	1
$f_2$	0	1	1	0	1	0	1	0

Составим таблицу функций  $f_1(x, y, x)$  и  $f_2(y, y, f_1(x, y, x))$ .

$x$	$y$	$f_1(x, y, x)$	$f_2(y, y, f_1)$
0	0	$f_1(0, 0, 0) = 1$	$f_2(0, 0, 1) = 1$
0	1	$f_1(0, 1, 0) = 0$	$f_2(1, 1, 0) = 1$
1	0	$f_1(1, 0, 1) = 1$	$f_2(0, 0, 1) = 1$
1	1	$f_1(1, 1, 1) = 1$	$f_2(1, 1, 1) = 0$

Выпишем таблицу функции  $h(x, y) = f_2(y, y, f_1(x, y, x))$ .

$x$	0	0	1	1
$y$	0	1	0	1
$h(x, y)$	1	1	1	0

Вектор значений функции  $h(x, y)$  имеет вид:  $h(x, y) = (1110)$ .

3. Используя таблицу 3.6, выразим формулой искомую функцию:  $h(x, y) = \overline{x} \cdot y = x|y$ .

**Пример 7.2.** Для булевой функции

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee yz \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z:$$

1. Построить логическую схему, реализующую функцию  $f(x, y, z)$  при помощи логических вентилей «И», «ИЛИ», «НЕ». Для схемы найти задержку и цену по Квайну.

2. Написать таблицу данной функции.

3. Найти фиктивные переменные функции  $f(x, y, z)$ .

4. Используя основные эквивалентности, преобразовать данную формулу в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных. Построить логическую схему, найти её задержку и цену по Квайну.

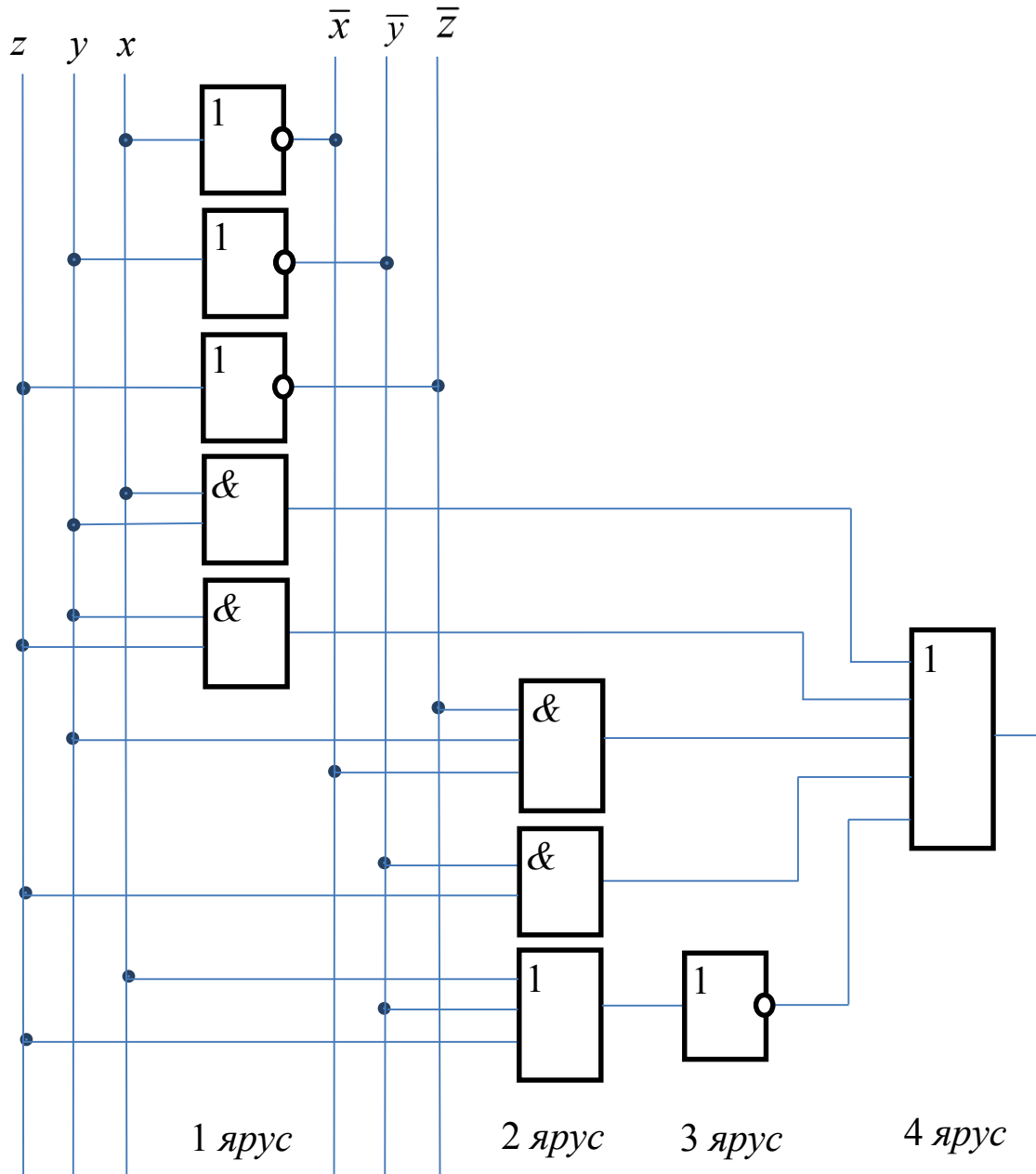


Рис. 7.3. Логическая схема, реализующая функцию  
 $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee yz \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ .



### Решение.

1. Логическая схема представлена на рис. 7.3.

Для схемы на рис.7.3 задержка -  $T = 4\tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=21$ .

2. Построим таблицу. Установим порядок выполнения операций в соответствии с их приоритетностью:

$$f_1 = \bar{x}; f_2 = \bar{y}; f_3 = \bar{z}; f_4 = x \vee f_2 \vee z; f_5 = \bar{f}_4; f_6 = xy;$$

$$f_7 = f_2 \cdot z; f_8 = f_1 \cdot y \cdot f_3; f_9 = yz; f = f_5 \vee f_6 \vee f_7 \vee f_8 \vee f_9.$$

Таким образом, количество операций, необходимых для получения векторного значения функции, равно десяти.

Таблица имеет вид:

$x$	$y$	$z$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1

3. Рассмотрим пары наборов, соседних по переменной  $x$ , и значения функции на этих наборах:

$$f(0,0,0) = f(1,0,0) = 0; f(0,0,1) = f(1,0,1) = 1;$$

$$f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1; f(0,1,1) = f(1,1,1) = 1.$$

Значит,  $x$  - фиктивная переменная.

Рассмотрим пары наборов по переменной  $y$ . Так как  $f(0,0,0) \neq f(0,1,0)$ , то  $y$  - существенная переменная.

Рассматривая пары наборов по переменной  $z$ , находим, что  $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$ , поэтому  $z$  - существенная переменная.

Получили, что  $f(x,y,z) = g(y,z)$ . Таблица функции  $g(y,z)$  имеет вид:

$y$	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1
$g(y,z)$	0	1	1	1

По таблице 3.6 определяем формулу  $g(y,z) = y \vee z$ , т.е.  $f(x,y,z) = y \vee z$ .

4. Применяя основные эквивалентности, преобразуем формулу к виду, не содержащему фиктивной переменной:

$$\begin{aligned}
 f(x,y,z) &= xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee x \vee \bar{y} \vee z = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z} = \\
 &= xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz = xy \vee z(\bar{y} \vee y) \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee z \cdot 1 \vee \bar{x}y\bar{z} = \\
 &= xy \vee z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee (z \vee \bar{z})(z \vee \bar{x}y) = xy \vee 1 \cdot (z \vee \bar{x}y) = \bar{x}y \vee z \vee \bar{x}y = \\
 &= y(x \vee \bar{x}) \vee z = y \cdot 1 \vee z = y \vee z.
 \end{aligned}$$

Итак,  $f(x,y,z) = y \vee z$ , её логическая схема показана на рис. 7.4. Задержка схемы -  $T = \tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=2$ .

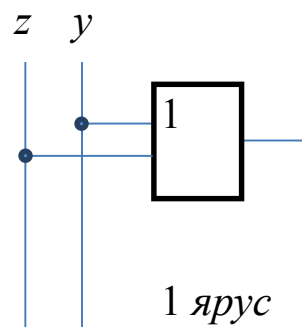


Рис. 7.4. Логическая схема, реализующая функцию  $f(x,y,z) = y \vee z$ .

## 8. Теорема о дизъюнктивном разложении булевой функции по переменным

Обозначим

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Построим таблицу значений функции  $x^\sigma$ .

$x$	0	0	1	1
$\sigma$	0	1	0	1
$x^\sigma$	$0^0 = \bar{0} = 1$	$0^1 = 0$	$1^0 = \bar{1} = 0$	$1^1 = 1$

Из таблицы следует, что  $x^\sigma = 1$  тогда и только тогда, когда  $x = \sigma$ .

**Теорема 8.1 (о дизъюнктивном разложении булевой функции по переменным).** Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  и для любого  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) справедливо следующее равенство:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in B^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Это равенство называют *формулой дизъюнктивного разложения по совокупности переменных*  $x_1, \dots, x_k$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольный набор  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Вычислим значение правой части равенства на этом наборе. Как только хотя бы один из сомножителей будет равен нулю, вся конъюнкция обратится в нуль. Таким образом, из ненулевых конъюнкций останется лишь одна - та, в которой  $\alpha_i = \sigma_i$ , поэтому правая часть равенства примет вид:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in B^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = \\ & = 0 \vee \dots \vee 0 \vee \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

В силу того, что  $x^x = 1$ , указанное выражение равно  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ .

Так как равенство

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in B^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

выполняется для произвольного набора  $\tilde{\alpha}$ , то справедлива формула

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in B^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 8.1.** Разложение произвольной функции алгебры логики по одной переменной имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = \bar{x}_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

**Доказательство.** По теореме 8.1 напомним разложение по переменной  $x_i$ :

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i^0 \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \\ \vee x_i^1 \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bar{x}_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \\ \vee x_i \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n). \square$$

**Пример 8.1.** Преобразовать функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0100 \ 0111 \ 1000 \ 1011),$$

используя формулу дизъюнктивного разложения по совокупности переменных  $x_2, x_4$ , представляя получаемые функции от двух переменных формулами над множеством элементарных связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сумма по модулю два, эквивалентность, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

**Решение.** Для данного случая формула дизъюнктивного разложения имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigvee_{(a_2, a_4)} x_2^{a_2} \cdot x_4^{a_4} \cdot f(x_1, a_2, x_3, a_4) = \\ = \bigvee_{\substack{(0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1)}} x_2^{a_2} \cdot x_4^{a_4} \cdot f(x_1, a_2, x_3, a_4) = \\ = x_2^0 \cdot x_4^0 \cdot f(x_1, 0, x_3, 0) \vee x_2^0 \cdot x_4^1 \cdot f(x_1, 0, x_3, 1) \vee x_2^1 \cdot x_4^0 \cdot f(x_1, 1, x_3, 0) \vee \\ \vee x_2^1 \cdot x_4^1 \cdot f(x_1, 1, x_3, 1) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \cdot f(x_1, 0, x_3, 0) \vee \bar{x}_2 \cdot x_4 \cdot f(x_1, 0, x_3, 1) \vee \\ \vee x_2 \cdot \bar{x}_4 \cdot f(x_1, 1, x_3, 0) \vee x_2 \cdot x_4 \cdot f(x_1, 1, x_3, 1).$$

Запишем таблицу функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$x_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_3$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_4$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1

С помощью построенной таблицы составим таблицы для четырёх функций, зависящих от переменных  $x_1, x_3$ :  $f(x_1, 0, x_3, 0)$ ,  $f(x_1, 0, x_3, 1)$ ,  $f(x_1, 1, x_3, 0)$ ,  $f(x_1, 1, x_3, 1)$ .

$x_1$	$x_3$	$f(x_1, 0, x_3, 0)$	$f(x_1, 0, x_3, 1)$	$f(x_1, 1, x_3, 0)$	$f(x_1, 1, x_3, 1)$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
		$\overline{x_1 \rightarrow x_3}$	$x_1 \downarrow x_3$	$x_1 \vee x_3$	$x_1 \rightarrow x_3$

Для функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  формула дизъюнктивного разложения по совокупности переменных  $x_2, x_4$  имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \cdot (\overline{x_1 \rightarrow x_3}) \vee \overline{x_2} \cdot x_4 \cdot (x_1 \downarrow x_3) \vee x_2 \cdot \overline{x_4} \cdot (x_1 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_4 \cdot (x_1 \rightarrow x_3).$$

### 8.1. Применение формулы дизъюнктивного разложения при реализации булевой функции на мультиплексоре

Термином «мультиплексирование» называют процесс передачи данных от нескольких источников по одному общему каналу.

Мультиплексор ( $MS$ ) – это логическое устройство с одним выходом и двумя типами входов: информационными и адресными.

Обозначение  $MS$  можно расшифровать как multiplexor.

В мультиплексоре число информационных входов зависит от числа адресных входов. Если число адресных входов равно  $m$ , то максимальное число информационных входов не превышает  $2^m$ .

На рис.8.1 приведён пример условно графического обозначения мультиплексора с четырьмя информационными входами  $MS(4 \times 1)$ . Этот мультиплексор имеет два ( $m=2$ ) адресных входа  $A_0, A_1$  и четыре ( $2^m = 2^2 = 4$ ) информационных входа  $D_0, D_1, D_2, D_3$ .

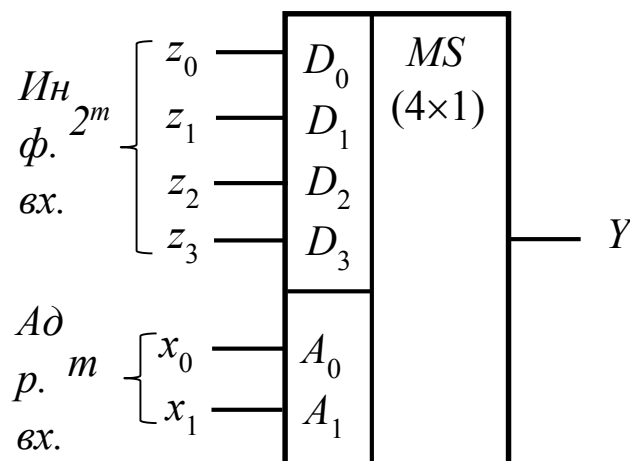


Рис.8.1.1. Условно графическое обозначение мультиплексора с четырьмя информационными входами.

Разберём принцип действия  $MS(4 \times 1)$ . Мультиплексор, в зависимости от управляющего сигнала, поступающего с адресных входов  $A_0, A_1$ , подключает поочередно каждый из четырёх информационных входов  $D_0, D_1, D_2, D_3$  к выходу  $Y$ .

Если на адресные входы  $A_0, A_1$  подать переменные  $x_0, x_1$ , а на информационные входы  $D_0, D_1, D_2, D_3$ , - переменные  $z_0, z_1, z_2, z_3$  соответственно, то двоичный набор  $(x_0, x_1)$  на адресных

входах определяет номер  $i = \sum_{j=0}^1 x_j \cdot 2^{1-j} = x_0 \cdot 2^1 + x_1 \cdot 2^0$  информа-

ционного входа  $D_i$ , с которого переменная  $z_i$  передаётся на выход  $Y$ , т.е.  $Y = z_i$ , если  $i = \sum_{j=0}^1 x_j \cdot 2^{1-j}$ .

Например, при  $(x_0x_1) = (00)$  номером информационного входа будет число  $0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$ , следовательно, на выходе получится сигнал  $Y = z_0$ ; при  $(x_0x_1) = (01)$  номером информационного входа будет число  $0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$ , следовательно, на выходе получится сигнал  $Y = z_1$ ; при  $(x_0x_1) = (10)$  номером информационного входа будет число  $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$ , следовательно, на выходе получится сигнал  $Y = z_2$ ; при  $(x_0x_1) = (11)$  номером информационного входа будет число  $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$ , следовательно, на выходе получится сигнал  $Y = z_3$ .

Мультиплексор можно использовать в качестве универсального логического элемента для реализации любой булевой функции от числа аргументов, равных числу адресных входов мультиплексора. Покажем это на примере булевой функции «сумма по модулю 2».

**Пример 8.1.1.** На мультиплексоре реализовать функцию «сумма по модулю 2», заданную таблицей истинности:

$x_1$	0	0	1	1
$x_2$	0	1	0	1
$f$	0	1	1	0

**Решение.** Выбираем мультиплексор  $MS(4 \times 1)$ , имеющий 2 адресных входа (по числу аргументов функции) и  $2^2 = 4$  информационных входов.

Чтобы сформировать значения функции  $f$  на выходе мультиплексора в соответствии с таблицей истинности необходимо:

- на адресные входы мультиплексора  $A_0, A_1$  подать соответствующие аргументы  $x_1, x_2$  функции  $f$ , чтобы номер информационного входа соответствовал номеру двоичного набора  $(x_1, x_2)$ ;

- к информационным входам подключить константы «0» и «1» в такой последовательности, которая полностью копирует последовательность единиц и нулей в таблице истинности функции  $f$ .

Схема реализации функции «сумма по модулю 2» приведена на рис. 8.1.2.

Если переменные функции принимают значения  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  или  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ , то мультиплексор  $(4 \times 1)$  коммутирует на выход сигнал с информационного входа  $D_0$  или  $D_3$ , т. е. нулевые значения. Если  $(x_1, x_2) = (0, 1)$  или  $(x_1, x_2) = (1, 0)$ , то на выход поступает соответствующий сигнал с информационного входа  $D_1$  или  $D_2$ .

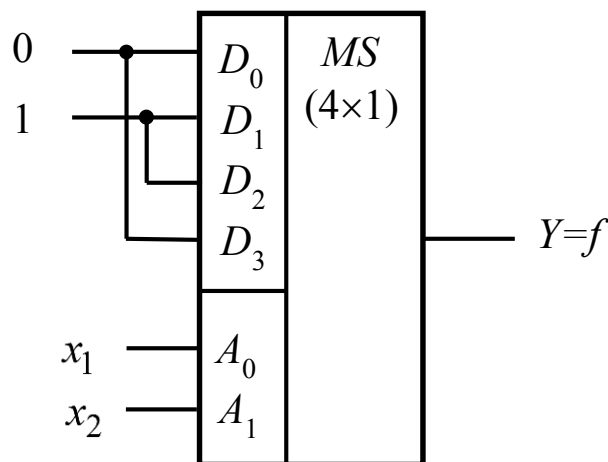


Рис.8.1.2. Реализация функции «сумма по модулю 2» на мультиплексоре  $(4 \times 1)$ .

В примере реализации функции «сумма по модулю 2» использовался мультиплексор с двумя адресными входами, число которых равно числу аргументов функции. Однако возможны ситуации, когда с помощью мультиплексора необходимо реализовать булеву функцию с числом переменных большим, чем число



адресных входов. В этом случае применяют формулу дизъюнктивного разложения булевой функции по переменным.

В качестве примера реализуем функцию «сумма по модулю 2» на мультиплексоре (2×1). Этот мультиплексор имеет один адресный вход  $A_0$  и два информационных  $D_0$  и  $D_1$ . В качестве адресной переменной выберем  $x_1$ . Запишем формулу дизъюнктивного разложения функции  $f(x_1, x_2)$  по этой переменной:

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 \cdot f(0, x_2) \vee x_1^1 \cdot f(1, x_2) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2) \vee x_1 \cdot f(1, x_2).$$

Составим таблицы для функций  $f(0, x_2)$  и  $f(1, x_2)$ , зависящих от переменной  $x_2$ .

$x_2$	$f(0, x_2)$	$f(1, x_2)$
0	0	1
1	1	0
	$x_2$	$\bar{x}_2$

Для функции  $f(x_1, x_2)$  формула дизъюнктивного разложения по переменной  $x_1$  имеет вид:  $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \cdot (x_2) \vee x_1 \cdot (\bar{x}_2)$ .

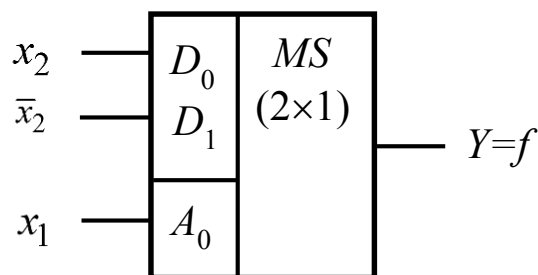


Рис.8.1.3. Реализация функции «сумма по модулю 2» на мультиплексоре (2×1).

Чтобы сформировать значения функции  $f(x_1, x_2)$  на выходе  $MS$  (2×1) в соответствии с полученным разложением, необходимо:

- к адресному входу  $A_0$  подключить переменную  $x_1$ ;
- на информационные входы  $D_0$  и  $D_1$  подать сигналы:

$$D_0 = f(0, x_2) = x_2, \quad D_1 = f(1, x_2) = \bar{x}_2.$$

Схема, реализующая функцию «сумма по модулю 2» на  $MS(2 \times 1)$ , показана на рис. 8.1.3.

**Пример 8.1.2.** С помощью  $MS(4 \times 1)$  синтезировать булеву функцию трёх переменных  $g(x_1, x_2, x_3) = (1101\ 0010)$ .

**Решение.** В качестве адресных переменных выберем  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда формула дизъюнктивного разложения имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \bigvee_{(a_1, a_2)} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot g(a_1, a_2, x_3) = \\ &= \bigvee_{\substack{(0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1)}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot g(a_1, a_2, x_3) = \\ &= x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot g(0, 0, x_3) \vee x_1^0 \cdot x_2^1 \cdot g(0, 1, x_3) \vee x_1^1 \cdot x_2^0 \cdot g(1, 0, x_3) \vee \\ &\vee x_1^1 \cdot x_2^1 \cdot g(1, 1, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot g(0, 0, x_3) \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot g(0, 1, x_3) \vee \\ &\vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot g(1, 0, x_3) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot g(1, 1, x_3). \end{aligned}$$

Запишем таблицу функции  $g(x_1, x_2, x_3)$ :

$x_1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_3$	0	1	0	1	0	1	0	1
$g$	1	1	0	1	0	0	1	0

С помощью построенной таблицы составим таблицы для четырёх функций, зависящих от переменной  $x_3$ :

$$g(0, 0, x_3), \quad g(0, 1, x_3), \quad g(1, 0, x_3), \quad g(1, 1, x_3).$$

$x_3$	$g(0, 0, x_3)$	$g(0, 1, x_3)$	$g(1, 0, x_3)$	$g(1, 1, x_3)$
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
	1	$x_3$	0	$\bar{x}_3$

Для функции  $g(x_1, x_2, x_3)$  формула дизъюнктивного разложения по совокупности переменных  $x_1, x_2$  имеет вид:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (1) \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot (x_3) \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (0) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot (\bar{x}_3).$$

Чтобы сформировать значения функции  $g$  на выходе мультиплексора в соответствии с полученным разложением, необходимо:

- на адресные входы мультиплексора  $A_0, A_1$  подключить соответствующие переменные  $x_1, x_2$  функции  $g$ , по которым проводилось разложение;

- в соответствии с разложением функции на информационные входы мультиплексора  $D_0, D_1, D_2, D_3$  подать сигналы:

$$D_0 = g(0, 0, x_3) = 1, \quad D_1 = g(0, 1, x_3) = x_3,$$

$$D_2 = g(1, 0, x_3) = 0, \quad D_3 = g(1, 1, x_3) = \bar{x}_3.$$

Схема мультиплексора, реализующего функцию  $g$ , изображена на рис. 8.1.4.

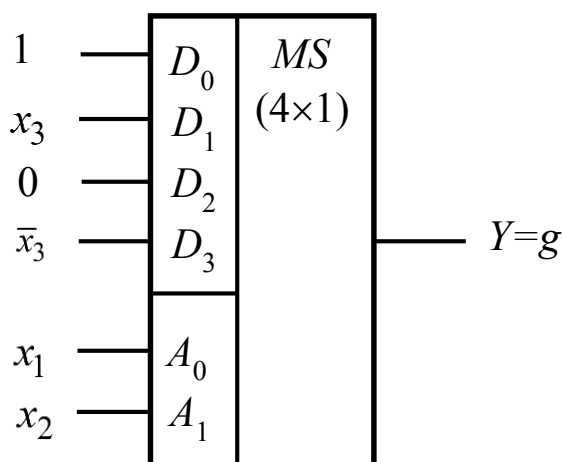


Рис.8.1.4. Реализация функции трёх аргументов на  $MS (4 \times 1)$ .

Переменная  $x_3$  в этом случае «выносятся» на информационный вход  $D_1$ , а переменная  $\bar{x}_3$  на вход  $D_3$ .

## 8.2. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы

**Теорема 8.2.1** (теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме). Для любой булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , отличной от тождественного нуля, справедливо следующее представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

которое является единственным.

Этот вид называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой функции*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и записывается СДНФ.

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  отлична от тождественного нуля. Напишем разложение этой функции по  $k = n$  переменным

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

что можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = & \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \vee \\ & \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Учитывая, что в первой дизъюнкции все значения функции равны единице, а вторая обнуляется из-за того, что все значения функции в ней равны нулю, получаем:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Покажем, что эта СДНФ единственная. В самом деле, имеется  $2^{2^n} - 1$   $n$ -местных функций, не равных тождественно нулю. Подсчитаем число различных СДНФ от  $n$  переменных.

Пусть  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Так как булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных соот-

ветствует двоичный набор значений  $f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$ , имеющий длину  $2^n$ , то множеству функций, имеющих в СДНФ одно дизъюнктивное слагаемое, соответствует множество двоичных наборов значений функций, содержащих только одну единицу. Количество таких наборов равно  $C_{2^n}^1$ , поэтому и одночленных СДНФ будет  $C_{2^n}^1$ . Аналогично определяется число  $k$ -членных СДНФ, которое равно  $C_{2^n}^k$ . Поэтому число всех различных СДНФ будет равно:  $C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \dots + C_{2^n}^k + \dots + C_{2^n}^{2^n}$ . Применяя свойство сочетаний  $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ , получим:

$$C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \dots + C_{2^n}^k + \dots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n} - 1.$$

Итак,  $2^{2^n} - 1$  функций реализуются посредством  $2^{2^n} - 1$  СДНФ, т.е. каждой функции соответствует единственная СДНФ. Теорема доказана.  $\square$

**Определение 8.2.1.** Формула вида  $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$ , где  $m \geq 1$ ,  $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\sigma_k \in \{0, 1\}$  и все переменные различны, называется *элементарной конъюнкцией ранга  $m$*  на множестве булевых переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Если ранг элементарной конъюнкции равен  $n$ , то конъюнкция  $x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}$  называется *полной*.

**Определение 8.2.2.** Представление функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в виде дизъюнкций элементарных конъюнкций, где существует хотя бы одна неполная конъюнкция, называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*.

Например, функцию  $f(x_1, x_2, x_3)$  можно представить в виде СДНФ  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3$ , у которой все элементарные конъюнкции полные, и в виде ДНФ  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3$ , у которой элементарная конъюнкция  $\overline{x_2}x_3$  полной не является.

**Теорема 8.2.2 (о совершенной конъюнктивной нормальной форме).** Для любой булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , отличной от тождественной единицы, справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} \left( \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}} \right),$$

которое является единственным.

Этот вид называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой функции*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и записывается СКНФ.

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  отлична от тождественной единицы, тогда функция  $\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  отлична от тождественного нуля. Напишем разложение этой функции по  $k = n$  переменным

$$\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot \overline{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)},$$

что можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \overline{f(x_1, \dots, x_n)} &= \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \vee \\ &\vee \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=0} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в первой дизъюнкции все значения функции равны единице, а вторая обнуляется из-за того, что все значения функции в ней равны нулю, получаем

$$\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}.$$

Так как  $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{\overline{f(x_1, \dots, x_n)}}$ , то, применяя правила де Моргана, имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}} = \\ &= \overline{\bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=1=0} \left( \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}} \vee \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right)} = \\ &= \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}=0} \left( \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}} \vee \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} \left( x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \right),$$

где  $\overline{x^\sigma} = x^{\bar{\sigma}}$  так как  $\overline{x^1} = \bar{x} = x^0 = x^{\bar{1}}$  и  $\overline{x^0} = \bar{\bar{x}} = x = x^1 = x^{\bar{0}}$ .

Из единственности СДНФ для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  вытекает единственность СКНФ для функции  $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{\overline{f(x_1, \dots, x_n)}}$ .

Утверждение теоремы доказано.  $\square$

**Определение 8.2.3.** Формула вида  $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_m}^{\sigma_m}$ , где  $m \geq 1$ ,  $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\sigma_k \in \{0, 1\}$  и все переменные различны, называется *элементарной дизъюнкцией ранга  $m$*  на множестве булевых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если ранг элементарной дизъюнкции равен  $n$ , то дизъюнкция  $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$  называется *полной*.

**Определение 8.2.4.** Представление функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в виде конъюнкций элементарных дизъюнкций, где существует хотя бы одна неполная дизъюнкция, называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*.

**Пример 8.2.1.** Для функции  $f(x, y, z) = (0001 \ 0101)$  найти СДНФ и СКНФ. По СДНФ функции  $f(x, y, z)$  построить логическую схему при помощи вентилях «И», «ИЛИ», «НЕ», найти её задержку и цену по Квайну.

**Решение.** Составим таблицу функции  $f(x, y, z)$ :

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	0	0	0	1	0	1	0	1

Найдём СДНФ:

$$f(x, y, z) = \bigvee_{(a,b,c) \mid f(a,b,c)=1} x^a y^b z^c = \bigvee_{\substack{(0,1,1) \\ (1,0,1) \\ (1,1,1)}} x^a y^b z^c = x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz.$$

Найдём СКНФ:

$$f(x, y, z) = \bigwedge_{(a,b,c) | f(a,b,c)=0} (x^{\bar{a}} \vee y^{\bar{b}} \vee z^{\bar{c}}) = \bigwedge_{\substack{(0,0,0) \\ (0,0,1) \\ (0,1,0) \\ (1,0,0) \\ (1,1,0)}} (x^{\bar{a}} \vee y^{\bar{b}} \vee z^{\bar{c}}) =$$

$$= (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \cdot (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) \cdot (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}) \cdot (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \cdot$$

$$\cdot (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}) = (x^1 \vee y^1 \vee z^1) \cdot (x^1 \vee y^1 \vee z^0) \cdot (x^1 \vee y^0 \vee z^1) \cdot$$

$$\cdot (x^0 \vee y^1 \vee z^1) \cdot (x^0 \vee y^0 \vee z^1) = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot$$

$$\cdot (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

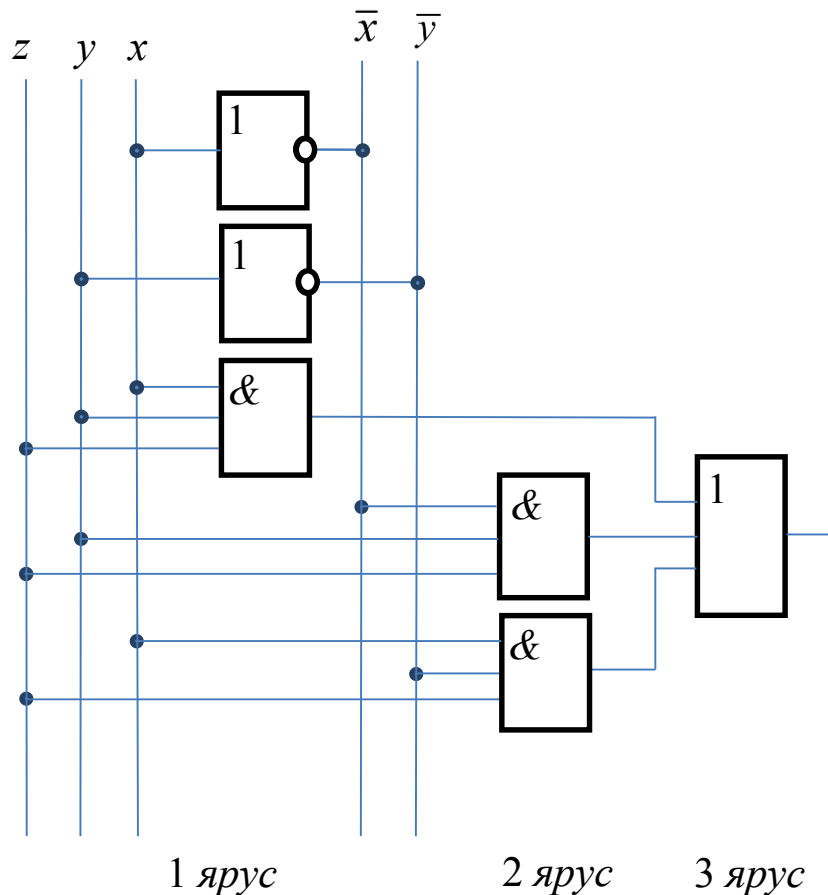


Рис. 8.2.1. Логическая схема, реализующая СДНФ функции

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz .$$



Логическая схема, реализующая СДНФ функции  $f(x, y, z)$  при помощи вентилях «И», «ИЛИ», «НЕ», показана на рис.8.2.1.

Для схемы на рис.8.2.1. задержка -  $T = 3\tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=14$ .

**Пример 8.2.2.** Для функций  $f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$ ,

$$f_2(x, y, z) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}z, \quad f_3(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z \vee z\bar{y}:$$

1) выяснить вопрос о равносильности ДНФ функций  $f_1, f_2, f_3$  сведением их к СДНФ;

2) при помощи основных эквивалентностей преобразовать ДНФ функции  $f_2$  в КНФ.

**Решение.**

1. Применяя эквивалентности  $x \vee \bar{x} = 1, x \vee x = x$  и  $x(y \vee z) = xy \vee xz$ , сведём данные функции к СДНФ.

Преобразуя формулу функции  $f_1$

$$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz = \bar{x}\bar{y} \cdot 1 \vee 1 \cdot y\bar{z} \vee x \cdot 1 \cdot z = \bar{x}\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y\bar{z} \vee x \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot z = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z,$$

получим СДНФ функции  $f_1$ :

$$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z.$$

Преобразуя формулу функции  $f_2$

$$f_2(x, y, z) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x} \cdot 1 \cdot 1 \vee xy\bar{z} \vee 1 \cdot \bar{y}z = \bar{x} \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot (z \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z} \vee (x \vee \bar{x}) \cdot \bar{y}z = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \underline{\bar{x}yz} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \underline{\bar{x}yz} = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z,$$

получим СДНФ функции  $f_2$ :

$$f_2(x, y, z) = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z.$$

Преобразуя формулу функции  $f_3$

$$f_3(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z \vee z\bar{y} = xy \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot 1 \cdot \bar{z} \vee 1 \cdot z\bar{y} = xy \cdot (z \vee \bar{z}) \vee \bar{x} \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot \bar{z} \vee (x \vee \bar{x}) \cdot z\bar{y} = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xz\bar{y} \vee \bar{x}z\bar{y},$$

получим СДНФ функции  $f_3$ :

$$f_3(x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xz\bar{y} \vee \bar{x}z\bar{y}.$$

Сравнивая СДНФ этих функций, делаем вывод, что  $f_1 = f_3 \neq f_2$ .

2. Применяя закон дистрибутивности

$$x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z),$$

преобразуем ДНФ функции  $f_2$  в КНФ:

$$\begin{aligned} f_2(x, y, z) &= \bar{x} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x} \vee x(y\bar{z}) \vee \bar{y}z = (\bar{x} \vee x)(\bar{x} \vee y\bar{z}) \vee \bar{y}z = \\ &= 1 \cdot (\bar{x} \vee y\bar{z}) \vee \bar{y}z = \bar{x} \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x} \vee (y\bar{z} \vee \bar{y}) \vee z = \\ &= \bar{x} \vee (y \vee \bar{y})(\bar{z} \vee \bar{y})(y \vee z)(\bar{z} \vee z) = \bar{x} \vee 1 \cdot (\bar{z} \vee \bar{y}) \cdot (y \vee z) \cdot 1 = \\ &= \bar{x} \vee (\bar{z} \vee \bar{y})(y \vee z) = (\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z), \\ f_2(x, y, z) &= (\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z). \end{aligned}$$

## 9. Полные системы. Примеры полных систем

Пусть  $A = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_2$  - система булевых функций.

**Определение 9.1.** Система  $A$  называется *полной* (в  $P_2$ ), если любую булеву функцию можно выразить формулой над  $A$ .

**Теорема 9.1.** Система  $A = \{\&, \vee, \neg\}$  является полной.

**Доказательство.** Если булева функция  $f$  отлична от тождественного нуля, то она выражается в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы, в которую входят лишь дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. Если же  $f = 0$ , то  $f = x \cdot \bar{x}$ . Теорема доказана.  $\square$

**Лемма 9.2.** Если система  $A$  — полная, и любая функция системы  $A$  может быть выражена формулой над некоторой другой системой  $B$ , то  $B$  - также полная система.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и две системы функций:  $A = \{g_1, g_2, \dots\}$  и  $B = \{h_1, h_2, \dots\}$ . В силу того, что система  $A$  полна, функция  $f$  может быть выражена в виде формулы над ней:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{J}[g_1, g_2, \dots]$ , где  $g_i = \mathfrak{R}_i[h_1, h_2, \dots]$ , то есть функ-

ция  $f$  представляется в виде  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{I}[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots]$ , иначе говоря, может быть представлена формулой над  $B$ . Перебирая таким образом все булевы функции, получим, что система  $B$  также полна. Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 9.3.** Следующие системы являются полными в  $P_2$ :

- 1)  $\{x \vee y, \bar{x}\}$ ; 2)  $\{x \cdot y, \bar{x}\}$ ; 3)  $\{x | y\}$ ; 4)  $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$ .

**Доказательство.**

1. Известно (теорема 9.1), что система  $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$  полна. Покажем, что полна система  $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ . Действительно, из правил де Моргана  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  получаем, что  $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ , то есть конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, и все функции системы  $A$  выражаются формулами над системой  $B$ . Согласно лемме 2 система  $B$  полна.

2. Аналогично пункту 1, применяя правила де Моргана, выразим дизъюнкцию через конъюнкцию и отрицание:  $x \vee y = \overline{\overline{x \cdot y}}$   $\Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ . Так как в п.1 показано, что система  $\{x \vee y, \bar{x}\}$  полна, то из леммы 9.2 следует истинность утверждения пункта 2.

3. Так как  $\bar{x} = x | x$ ,  $x \cdot y = \overline{x | y} = (x | y) \cdot (x | y)$  и из п.2 известно, что система  $\{x \cdot y, \bar{x}\}$  полна, то согласно лемме 9.2 система  $\{x | y\}$  полна.

4. По лемме 9.2 система  $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$  полна, т.к.  $\bar{x} = x \oplus 1$  и система  $\{x \cdot y, \bar{x}\}$  полна по п.2.

Теорема доказана.  $\square$

## 10. Теорема Жегалкина о представимости булевой функции полиномом

В 1927 году российский математик И. И. Жегалкин (1869 - 1947) предложил полином в качестве одного из способов представления булевой функции.

**Определение 10.1.** Элементарная конъюнкция на множестве булевых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. Монотонная конъюнкция либо имеет вид  $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_m}$ , где  $m \geq 1$  и  $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , либо является константой 1.

**Определение 10.2.** *Полиномом Жегалкина* от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется либо выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus \dots \oplus K_l,$$

где  $l \geq 1$  и все  $K_j$  - различные монотонные конъюнкции на множестве переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , либо константа 0.

Запишем общий вид полинома Жегалкина от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \dots \oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n,$$

где константы и переменные принимают значения либо 0, либо 1.

**Теорема 10.1 (теорема Жегалкина).** Любую булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно единственным образом выразить полиномом Жегалкина над множеством переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Доказательство.**

1. Докажем существование полинома.

Константа 0 – это полином Жегалкина по определению. Известно, что любая булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , отличная от тождественного нуля, представима СДНФ, поэтому построим полином Жегалкина, применяя к СДНФ формулы  $\bar{x} = x \oplus 1$  и  $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$ .

СДНФ функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Так как конъюнкции, входящие в СДНФ различные и полные, то произведение любой пары конъюнкций  $K_i$  и  $K_j$  будет содержать произведение противоположных переменных, поэтому  $K_i \cdot K_j = 0$ . Для полных конъюнкций справедлива формула:

$$K_i \vee K_j = K_i \cdot K_j \oplus K_i \oplus K_j = K_i \oplus K_j.$$

В заданной СДНФ заменяем каждый символ дизъюнкции на символ суммы по модулю 2, применяя к каждой паре конъюнкций формулу  $K_i \vee K_j = K_i \oplus K_j$ . Получим:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Покажем, что  $x_i^{\sigma_i} = x_i \oplus \bar{\sigma}_i$ :

если  $\sigma_i = 0$ , то  $x_i^{\sigma_i} = x_i^0 = \bar{x}_i = x_i \oplus 1 = x_i \oplus \bar{\sigma}_i$ ;

если  $\sigma_i = 1$ , то  $x_i^{\sigma_i} = x_i^1 = x_i = x_i \oplus 0 = x_i \oplus \bar{\sigma}_i$ .

Теперь вместо каждой переменной  $x_i^{\sigma_i}$  подставляем равносильную формулу  $x_i \oplus \bar{\sigma}_i$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1) \cdot (x_2 \oplus \bar{\sigma}_2) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus \bar{\sigma}_n).$$

Применяя законы коммутативности  $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ , ассоциативности,  $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$  и дистрибутивности  $x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$ , раскрываем в полученном выражении скобки. Получим сумму конъюнкций, которая ещё не является полиномом Жегалкина, так как может содержать пары одинаковых конъюнкций. Удаляем эти конъюнкции, используя равносильности  $x \oplus x = 0$  и  $x \oplus 0 = x$ . В результате получим полином Жегалкина функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Существование доказано.

2. Докажем единственность представления. Подсчитаем число различных всевозможных монотонных конъюнкций от  $n$  переменных. Для этого составим таблицу 10.1, где каждой переменной соответствует единица, если она присутствует в монотонной конъюнкции и ноль в противном случае. Константе 1 в таблице поставим в соответствие набор нулей.

Очевидно, что построенная таблица реализует взаимно однозначное отображение между множеством монотонных конъюнкций от  $n$  переменных и множеством  $n$ -разрядных двоичных наборов. Так как количество  $n$ -разрядных двоичных наборов

равно  $2^n$ , то и монотонных конъюнкций от  $n$  переменных будет  $2^n$ .

Таблица 10.1.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$	1	1	1	...	1
...	...	...	...	...	...
$x_1 \cdot x_2$	1	1	0	...	0
...	...	...	...	...	...
$x_1$	1	0	0	...	0
<b>1</b>	0	0	0	...	0

Построим аналогичное взаимно однозначное отображение между всевозможными суммами монотонных конъюнкций и векторами длины  $2^n$  - числа конъюнкций. Для этого составим таблицу 10.2, где под соответствующей монотонной конъюнкцией стоит единица, если она входит в данную сумму, и ноль, если не входит. При этом константе ноль ставится в соответствие нулевой набор.

Таблица 10.2.

	$x_1 x_2 x_3 \dots x_n$	...	$x_1 x_2$	...	$x_1$	1
$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \oplus \dots \oplus x_1 x_2 \oplus \dots \oplus 1$	1	...	1	...	1	1
...	...	...	...	...	...	...
$x_1 x_2 \oplus 1$	0	...	1	...	0	1
...	...	...	...	...	...	...
1	0	...	0	...	0	1
0	0	...	0	...	0	0

Очевидно, что такое отображение взаимнооднозначное. Всего различных сумм будет столько, сколько существует различных двоичных векторов длины  $2^n$ , то есть -  $2^{2^n}$ . Мы получили, что

число различных полиномов Жегалкина от  $n$  переменных совпадает с числом булевых функций.

Так как каждой функции от  $n$  переменных соответствует полином и число функций равно числу полиномов, то каждой функции будет соответствовать единственный полином Жегалкина. Единственность доказана.  $\square$

Приведём некоторые наиболее известные способы построения полинома Жегалкина.

*Построение полинома Жегалкина по СДНФ* опирается на формулу

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1) \cdot (x_2 \oplus \bar{\sigma}_2) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus \bar{\sigma}_n)$$

и описано при доказательстве теоремы 10.1.

*Метод неопределённых коэффициентов.* Записываем булеву функцию в виде полинома Жегалкина с неопределёнными коэффициентами. Приравниваем значения функции к значениям полинома на соответствующих наборах переменных и, решая полученную систему, находим неизвестные коэффициенты.

*Нахождение полинома Жегалкина при помощи треугольника Паскаля.* На значениях исходной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$  строим треугольник Паскаля. В первой строке треугольника выписываем значения  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}$  исходной функции  $f$ . Вторую строку получаем из первой, суммируя по модулю 2 соседние элементы первой строки (рис. 10.1).

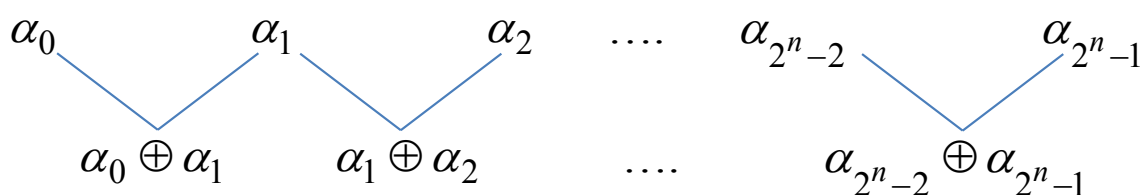


Рис. 10.1. Построение строк треугольника Паскаля.

Третью строку получаем из второй, суммируя по модулю 2 соседние элементы второй строки. Продолжая процесс, получим треугольник Паскаля, левая сторона которого выделяется жир-

ным шрифтом, так как она определяет коэффициенты при монотонных конъюнкциях полинома Жегалкина.

Чтобы по треугольнику Паскаля построить полином Жегалкина, нужно каждой строке треугольника поставить в соответствие монотонную конъюнкцию полинома. Для этого, двигаясь по строкам треугольника сверху вниз, ставим в соответствие каждой строке двоичный набор из таблицы истинности. Наборы выписываем в порядке возрастания их номеров. При доказательстве теоремы 10.1 было построено взаимно однозначное соответствие между множеством монотонных конъюнкций от  $n$  переменных и множеством  $n$ -разрядных двоичных наборов. Используя это соответствие, по единицам, входящим в двоичные наборы, составляем монотонные конъюнкции полинома. В полином Жегалкина входят только те конъюнкции, коэффициенты которых равны 1 на левой стороне треугольника Паскаля.

**Пример 10.1.** Для функции  $f(x, y, z) = (1110\ 1010)$  найти полином Жегалкина тремя способами. Построить логическую схему, реализующую полином Жегалкина функции  $f(x, y, z)$ , при помощи вентилях «И», «М<sub>2</sub>» и константы 1, которая считается данной.

**Решение.** Составим таблицу функции:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	1	1	1	0	1	0	1	0

**Способ 1.** Найдём полином Жегалкина данной функции, исходя из формулы:

$$f(x, y, z) = \sum_{(a,b,c) \mid f(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{(0,0,0) \\ (0,0,1) \\ (0,1,0) \\ (1,0,0) \\ (1,1,0)}} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\
&= (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{1}) \oplus \\
&\oplus (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) \oplus \\
&\oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{0}) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus \\
&\oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 0) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 0)(z \oplus 1) \oplus \\
&\oplus (x \oplus 0)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 0)(y \oplus 0)(z \oplus 1) = \\
&= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus \\
&\oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1) = \\
&= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1 \oplus z) \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(z \oplus 1)(y \oplus 1 \oplus y) = \\
&= (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(z \oplus 1) = \\
&= xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus (x \oplus 1)(yz \oplus y) \oplus xz \oplus x = \\
&= xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xz \oplus x = \\
&= 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz
\end{aligned}$$

Итак,  $f(x, y, z) = 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$ .

**Способ 2.** Применим метод неопределённых коэффициентов. Будем искать полином для данной функции в виде:

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz.$$

В данное соотношение, используя таблицу функции, будем подставлять наборы значений переменных и значения функции:

$$f(0, 0, 0) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0$$

или  $a_0 = 1$ ;

$$f(0, 0, 1) = 1 = a_0 \oplus a_3 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_3 = 1;$$

$$f(0, 1, 0) = 1 = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_2 = 1;$$

$$f(0, 1, 1) = 0 = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0;$$

$$f(1, 0, 0) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_1 = 1;$$

$$\begin{aligned}
 f(1,0,1) &= 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0; \\
 f(1,1,0) &= 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \text{ или } a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1; \\
 f(1,1,1) &= 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 \oplus a_7 \cdot 1 \\
 &\text{или } a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0.
 \end{aligned}$$

Составляем и решаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_0 \oplus a_3 = 1, \\ a_0 \oplus a_2 = 1, \\ a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0, \\ a_0 \oplus a_1 = 1, \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0, \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1, \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ a_4 = 0, \\ a_5 = 1, \\ a_6 = 1, \\ a_7 = 1. \end{array} \right.$$

Подставляя найденные коэффициенты в выражение

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$$

получим, что

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= 1 \oplus 0 \cdot x \oplus 0 \cdot y \oplus 0 \cdot z \oplus 0 \cdot xy \oplus 1 \cdot xz \oplus 1 \cdot yz \oplus 1 \cdot xyz = \\
 &= 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz.
 \end{aligned}$$

Полином Жегалкина имеет вид:  $f(x, y, z) = 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$ .

**Способ 3.** Строим треугольник Паскаля (табл. 10.3).

Полином Жегалкина функции  $f$  будет состоять из четырёх слагаемых, т.к. левая сторона треугольника Паскаля содержит четыре единицы. Первой единице соответствует набор (000) и монотонная конъюнкция 1; второй единице соответствует набор (011) и монотонная конъюнкция  $yz$ ; третьей единице соответствует набор (101) и монотонная конъюнкция  $xz$ ; четвёртой единице соответствует набор (111) и монотонная конъюнкция  $xyz$ .

Полином Жегалкина имеет вид:  $f(x, y, z) = 1 \oplus yz \oplus xz \oplus xyz$ .

Таблица 10.3.

Монотонные конъюнкции	Двоичные наборы (xyz)	Треугольник Паскаля
1	(000)	1 1 1 0 1 0 1 0
z	(001)	0 0 1 1 1 1 1 1
y	(010)	0 1 0 0 0 0 0 0
yz	(011)	1 1 0 0 0 0 0 0
x	(100)	0 1 0 0 0 0 0 0
xz	(101)	1 1 0 0 0 0 0 0
xy	(110)	0 1 0 0 0 0 0 0
xyz	(111)	1 0 0 0 0 0 0 0

Логическая схема, реализующая полином Жегалкина функции  $f(x, y, z)$  при помощи вентилях «И», «М<sub>2</sub>» и заданной константы 1, показана на рис. 10.2.

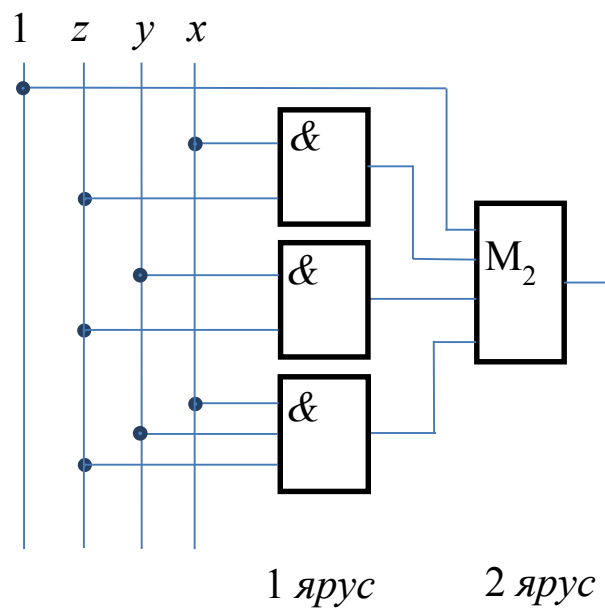


Рис. 10.2. Логическая схема, реализующая полином Жегалкина функции  $f(x, y, z) = 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$ .

Задержка логической схемы (рис.10.2) -  $T = 2\tau$ , цена по Квайну -  $S_Q=11$ .

## 11. Замкнутые классы

Пусть  $A = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_2$  - система булевых функций.

**Определение 11.1.** Множество всех булевых функций, которые можно выразить формулами над  $A$ , называется *замыканием* системы  $A$  и обозначается  $[A]$ .

Имеют место следующие свойства:

1)  $A \subset [A]$ ;

2)  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow [A_1] \subseteq [A_2]$ , причём, если в левой части импликации строгое вложение, то из него вовсе не следует строгое вложение в правой части;

3)  $[[A]] = [A]$ .

**Определение 11.2.** Система  $A$  называется *замкнутым классом*, если замыкание системы  $A$  совпадает с самой системой  $A$ , т.е.  $[A] = A$ .

### 11.1. Класс функций, сохраняющих константу 0

Класс функций, сохраняющих константу 0, определяется следующим образом:

$$T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

Классу  $T_0$  принадлежат, например, функции 0,  $x$ ,  $x \cdot y$ ,  $x \vee y$ ,  $x \oplus y$ . Классу  $T_0$  не принадлежат функции 1,  $\bar{x}$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $x | y$ ,  $x \downarrow y$ ,  $x \leftrightarrow y$ .

### 11.2. Класс функций, сохраняющих константу 1

Определим класс функций, сохраняющих константу 1:

$$T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Классу  $T_1$  принадлежат, например, функции 1,  $x$ ,  $x \cdot y$ ,  $x \vee y$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $x \leftrightarrow y$ . Классу  $T_1$  не принадлежат функции 0,  $\bar{x}$ ,  $x \oplus y$ ,  $x | y$ ,  $x \downarrow y$ .

### 11.3. Класс самодвойственных функций

**Определение 11.3.1.** Булеву функцию

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

называют *двойственной* к функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

а наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  называют *противоположными*.

Применяя определение, для функции  $f(x, y, z) = (1001\ 0101)$  построим таблицу двойственной функции  $f^*(x, y, z)$ :

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$	$f^*(x, y, z)$
0	0	0	1	$f^*(0, 0, 0) = \overline{f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})} = \overline{f(1, 1, 1)} = \bar{1} = 0$
0	0	1	0	$f^*(0, 0, 1) = \overline{f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})} = \overline{f(1, 1, 0)} = \bar{0} = 1$
0	1	0	0	$f^*(0, 1, 0) = \overline{f(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})} = \overline{f(1, 0, 1)} = \bar{1} = 0$
0	1	1	1	$f^*(0, 1, 1) = \overline{f(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})} = \overline{f(1, 0, 0)} = \bar{0} = 1$
1	0	0	0	$f^*(1, 0, 0) = \overline{f(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})} = \overline{f(0, 1, 1)} = \bar{1} = 0$
1	0	1	1	$f^*(1, 0, 1) = \overline{f(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})} = \overline{f(0, 1, 0)} = \bar{0} = 1$
1	1	0	0	$f^*(1, 1, 0) = \overline{f(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})} = \overline{f(0, 0, 1)} = \bar{0} = 1$
1	1	1	1	$f^*(1, 1, 1) = \overline{f(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})} = \overline{f(0, 0, 0)} = \bar{1} = 0$

Итак, для функции  $f(x, y, z) = (1001\ 0101)$  двойственной будет функция  $f^*(x, y, z) = (0101\ 0110)$ .

**Теорема 11.3.1 (принцип двойственности).**

Пусть  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f_1, f_2, \dots, f_n)$ , тогда

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*).$$

**Доказательство.**

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), f_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))} =$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\overline{\overline{f_1(\overline{x_1, \dots, \overline{x_n}})}, \overline{\overline{f_2(\overline{x_1, \dots, \overline{x_n}})}, \dots, \overline{\overline{f_n(\overline{x_1, \dots, \overline{x_n}})}}}\right) = \\
&= f\left(\overline{\overline{f_1^*(x_1, \dots, x_n)}, \overline{\overline{f_2^*(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{\overline{f_n^*(x_1, \dots, x_n)}}}\right) = f^*(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

Класс самодвойственных функций определяется следующим образом:

$$S = \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \in P_2 \mid f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n) \right\}.$$

**Пример 11.3.1.** Доопределить функцию

$$h(x, y, z) = (1-10 \quad --1-)$$

так, чтобы  $h \in S$ . Выяснить вопрос о принадлежности построенной функции к классам  $T_0$  и  $T_1$ .

**Решение.** Доопределим функцию  $h$ , используя определение самодвойственной функции.

Рассмотрим пары противоположных наборов:

(000) и (111); (001) и (110); (010) и (101); (100) и (011).

Используя известные значения функции  $h$ , получим:

$$h(000) = 1 \Rightarrow h(111) = 0; \quad h(010) = 1 \Rightarrow h(101) = 0;$$

$$h(011) = 0 \Rightarrow h(100) = 1; \quad h(110) = 1 \Rightarrow h(001) = 0.$$

В результате имеем:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$h(x, y, z)$	1	-	1	0	-	-	1	-
$h(x, y, z)$	1	0	1	0	1	0	1	0

Проверим функцию на принадлежность классам  $T_0$  и  $T_1$ :

$$h(000) = 1 \Rightarrow h \notin T_0; \quad h(111) = 0 \Rightarrow h \notin T_1.$$

## 11.4. Класс монотонных функций

**Определение 11.4.1.** Говорят, что набор  $\tilde{\alpha}^n$  предшествует набору  $\tilde{\beta}^n$ , если  $\alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначают:  $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$ .

Рассмотрим наборы  $\tilde{\alpha}^3 = (001)$ ,  $\tilde{\beta}^3 = (010)$ ,  $\tilde{\gamma}^3 = (011)$ . Для наборов  $\tilde{\alpha}^3$  и  $\tilde{\beta}^3$  неравенства, полученные при сравнении координат, имеют вид  $0 \leq 0$ ,  $0 \leq 1$  и  $1 \geq 0$ . Поэтому набор  $\tilde{\alpha}^3$  не предшествует набору  $\tilde{\beta}^3$ . Для наборов  $\tilde{\alpha}^3$  и  $\tilde{\gamma}^3$  неравенства имеют вид  $0 \leq 0$ ,  $0 \leq 1$ ,  $1 \leq 1$ , поэтому  $\tilde{\alpha}^3 < \tilde{\gamma}^3$ .

**Определение 11.4.2.** Наборы  $\tilde{\alpha}^n$  и  $\tilde{\beta}^n$  называются *сравнимыми*, если  $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$  или  $\tilde{\beta}^n < \tilde{\alpha}^n$ , иначе наборы называются *несравнимыми*.

**Определение 11.4.3.** Набор  $\tilde{\alpha}^n$  непосредственно предшествует набору  $\tilde{\beta}^n$ , если  $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$  и они соседние. Обозначают:  $\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n$ .

**Определение 11.4.4.** Булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *монотонной*, если для любых сравнимых наборов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  выполняется импликация  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ .

Определим класс монотонных функций:

$$M = \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \in P_2 \mid \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}) \right\}.$$

**Пример 11.4.1.** Доопределить функцию

$$f(x, y, z) = (-101 \quad --0-)$$

так, чтобы  $f \in M$ . Выяснить вопрос о принадлежности построенной функции к классам  $T_0$  и  $T_1$ .

**Решение.** Доопределим функцию  $f$ , используя определение монотонной функции.

Выпишем все наборы, между которыми можно установить отношение непосредственного предшествования. Если функция определена на наборе, то снизу под набором запишем её значение. Имеем:

$$\begin{array}{l}
 (1) \left[ \begin{array}{l} (000) \preceq (001) \preceq (011) \preceq (111); \\ \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 1 \\ (000) \preceq (001) \preceq (101) \preceq (111); \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \end{array} \right. \\
 (2) \left[ \begin{array}{l} (000) \preceq (010) \preceq (011) \preceq (111); \\ \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 1 \\ (000) \preceq (010) \preceq (110) \preceq (111); \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \right. \\
 (3) \left[ \begin{array}{l} (000) \preceq (100) \preceq (101) \preceq (111); \\ (000) \preceq (100) \preceq (110) \preceq (111). \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Используя полученные цепочки и определение монотонной функции имеем:

- так как  $f(110) = 0$ , то на всех наборах, предшествующих набору (110), функция  $f$  тоже должна равняться нулю, т.е.  $f(100) = f(000) = 0$ ;

- так как  $f(001) = 1$ , то на всех наборах, которым предшествует набор (001), функция  $f$  тоже должна равняться единице, т.е.  $f(101) = f(111) = 1$ .

В результате получим:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	-	1	0	1	-	-	0	-
$f(x, y, z)$	0	1	0	1	0	1	1	1

Проверим функцию на принадлежность классам  $T_0$  и  $T_1$ :

$$f(000) = 0 \Rightarrow f \in T_0; \quad f(111) = 1 \Rightarrow f \in T_1.$$



## 11.5. Класс линейных функций

**Определение 11.5.1.** Булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *линейной*, если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$ , где  $a_i \in \{0, 1\}$ .

Класс линейных функций определяется следующим образом:  
 $L = \{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n\}$ .

**Пример 11.5.1.** Доопределить функцию

$$g(x, y, z) = (\text{---}1 \text{---}010)$$

так, чтобы  $g \in L$ . Выяснить вопрос о принадлежности построенной функции к классам  $T_0$  и  $T_1$ .

**Решение.** Доопределим функцию  $g$ , учитывая, что она линейная. Запишем общий вид линейной функции от переменных  $x, y, z$ :

$$g(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z.$$

Подставляя наборы значений аргументов, на которых определена функция, получим систему соотношений:

$$g(011) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1;$$

$$g(101) = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1;$$

$$g(110) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0;$$

$$g(111) = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1;$$

или

$$\begin{cases} a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1; \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 = 0; \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 = 1; \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0; \\ a_1 = 1; \\ a_2 = 0; \\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Итак,  $g(x, y, z) = 0 \oplus 1 \cdot x \oplus 0 \cdot y \oplus 1 \cdot z = x \oplus z$ . Исходя из этой формулы, найдём значения функции  $g$  на тех наборах, на которых она не была определена:

$$g(001) = 0 \oplus 1 = 1; \quad g(010) = 0 \oplus 0 = 0; \quad g(100) = 1 \oplus 0 = 1.$$

В итоге имеем:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$g(x, y, z)$	-	-	-	1	-	0	1	0
$g(x, y, z)$	0	1	0	1	1	0	1	0

Проверим функцию на принадлежность классам  $T_0$  и  $T_1$ :

$$g(000) = 0 \Rightarrow g \in T_0; \quad g(111) = 0 \Rightarrow g \notin T_1.$$

### 11.6. Закрытость классов $T_0$ , $T_1$ , $S$ , $M$ и $L$

**Теорема 11.6.1.** Классы  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $L$  замкнуты.

**Доказательство.** Чтобы доказать, что некоторый класс  $K$  замкнут, достаточно показать, что если функция реализована в виде формулы над  $K$ , то она принадлежит  $K$ .

Пусть  $K$  один из классов  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $L$ ,  $f, f_1, \dots, f_n \in K$  и

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

При  $K = T_0$ ,

$$\Phi(0, \dots, 0) = f(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_n(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = 0,$$

следовательно,  $\Phi \in T_0$  и  $T_0$  замкнут.

При  $K = T_1$ ,

$$\Phi(1, \dots, 1) = f(f_1(1, \dots, 1), \dots, f_n(1, \dots, 1)) = f(1, \dots, 1) = 1,$$

следовательно,  $\Phi \in T_1$  и  $T_1$  замкнут.

При  $K = S$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^*(x_1, \dots, x_n) &= f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n^*(x_1, \dots, x_n)) = \\ &= f^*(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = \\ &= f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

следовательно,  $\Phi \in S$  и  $S$  замкнут.

При  $K = M$ , если  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ , то

$$\begin{cases} f_1(\tilde{\alpha}) \leq f_1(\tilde{\beta}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_n(\tilde{\alpha}) \leq f_n(\tilde{\beta}), \end{cases}$$

и  $(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_n(\tilde{\alpha})) \prec (f_1(\tilde{\beta}), \dots, f_n(\tilde{\beta}))$ . Следовательно,

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_n(\tilde{\alpha})) \leq f(f_1(\tilde{\beta}), \dots, f_n(\tilde{\beta})) = \Phi(\tilde{\beta}),$$

поэтому  $\Phi \in M$  и  $M$  замкнут.

При  $K = L$ , имеем

$$\begin{aligned} f &= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n, \\ f_1 &= a_0^1 \oplus a_1^1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n^1 x_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_n &= a_0^n \oplus a_1^n x_1 \oplus \dots \oplus a_n^n x_n. \end{aligned}$$

Подставляем выражения для функций  $f, f_1, \dots, f_n$  в формулу:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \dots, x_n) &= f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = \\ &= a_0 \oplus a_1 f_1(x_1, \dots, x_n) \oplus \dots \oplus a_n f_n(x_1, \dots, x_n) = \\ &= a_0 \oplus a_1 (a_0^1 \oplus a_1^1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n^1 x_n) \oplus \dots \oplus a_n (a_0^n \oplus a_1^n x_1 \oplus \dots \oplus a_n^n x_n) = \\ &= c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Phi \in L$  и  $L$  замкнут.

Теорема доказана.  $\square$

## 12. Лемма о несамодвойственной функции

**Лемма 12.1 (о несамодвойственной функции).** Из любой несамодвойственной булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , подставляя вместо всех переменных функции  $\bar{x}$  и  $x$ , можно получить  $\varphi(x) \equiv const$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \notin S$ , тогда

$$\overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \neq f(x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно, существует набор  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , на котором

$$\overline{f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)} \neq f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \Leftrightarrow f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Построим функцию  $\varphi(x) = f(x \oplus \sigma_1, \dots, x \oplus \sigma_n)$ , тогда

$$\varphi(0) = f(0 \oplus \sigma_1, \dots, 0 \oplus \sigma_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

$$\varphi(1) = f(1 \oplus \sigma_1, \dots, 1 \oplus \sigma_n) = f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n).$$

Так как  $f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , то  $\varphi(0) = \varphi(1)$  и  $\varphi(x) \equiv \text{const}$ .

Заметим, что замена переменных  $x_1, \dots, x_n$  функции  $f$  выражениями  $x \oplus \sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  удовлетворяет условию теоремы, так как

$$x \oplus \sigma_i = \begin{cases} x, & \sigma_i = 0, \\ \bar{x}, & \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Пример 12.1.** Из несамодвойственной функции  $g(x, y, z) = (1001\ 1100)$  получить константы 0 и 1. Построить логическую схему, реализующую константы 0 и 1 на логическом элементе  $g(x, y, z)$ .

**Решение.** Строим константу 0. Для этого найдём пару противоположных наборов, на которых функция  $g$  равна нулю. Это наборы (001) и (110). Выберем набор (110), и рассмотрим функцию  $o(x)$ :

$$o(x) = g(x^1, x^1, x^0) = g(x, x, \bar{x}).$$

Найдём значения функции  $o(x)$  на её наборах:

$$o(0) = g(0, 0, 1) = 0; \quad o(1) = g(1, 1, 0) = 0.$$

Поэтому,  $o(x) = 0$ .

Константа 0 построена,  $0 = g(x, x, \bar{x})$ . Её реализация на логическом элементе  $g(x, y, z)$  показана на рис. 12.1 а).

Строим константу 1. Для этого найдём пару противоположных наборов, на которых функция  $g$  равна единице. Это наборы (011) и (100). Выберем набор (011), и рассмотрим функцию  $e(x)$ :

$$e(x) = g(x^0, x^1, x^1) = g(\bar{x}, x, x).$$

Найдём значения функции  $e(x)$  на её наборах:

$$e(0) = g(1, 0, 0) = 1; \quad e(1) = g(0, 1, 1) = 1.$$

Следовательно,  $e(x) = 1$ .

Константа 1 построена,  $1 = g(\bar{x}, x, x)$ . Её реализация на логическом элементе  $g(x, y, z)$  показана на рис.12.1 б).

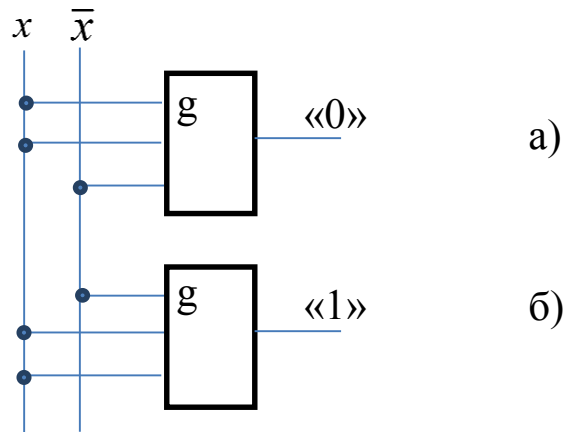


Рис. 12.1. Реализация констант 0 и 1 на логическом элементе  $g(x, y, z)$ .

### 13. Лемма о немонотонной функции

**Лемма 13.1 (о немонотонной функции).** Из любой немонотонной булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , подставляя вместо всех переменных функции  $x, 0, 1$ , можно получить функцию  $\varphi(x) = \bar{x}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \notin M$ , тогда существуют такие наборы  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , что  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$  и  $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$ . Выделим те разряды  $i_1, \dots, i_k$  наборов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$ , на которых они различаются. Очевидно, в наборе  $\tilde{\alpha}$  эти разряды равны 0, а в наборе  $\tilde{\beta}$  - 1. Рассмотрим последовательность наборов  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$  такую, что  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 \preceq \tilde{\alpha}_1 \preceq \dots \preceq \tilde{\alpha}_k = \tilde{\beta}$ . Набор  $\tilde{\alpha}_{i+1}$  по-

лучается из набора  $\tilde{\alpha}_i$  заменой одного из нулей, расположенного в одной из позиций  $i_1, \dots, i_k$ , на единицу. Образованные наборы  $\tilde{\alpha}_{i+1}$  и  $\tilde{\alpha}_i$  являются соседними, и для них выполняется соотношение  $\tilde{\alpha}_i \prec \tilde{\alpha}_{i+1}$ , поэтому  $\tilde{\alpha}_i \preceq \tilde{\alpha}_{i+1}$ . Поскольку  $f(\tilde{\alpha}) = 1$  и  $f(\tilde{\beta}) = 0$ , среди наборов  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$  найдутся два соседних  $\tilde{\alpha}_i$  и  $\tilde{\alpha}_{i+1}$ , такие что  $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$  и  $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 0$ . Пусть они различаются в  $r$ -ом разряде

$$\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, 0, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \quad \text{и}$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, 1, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n).$$

$$\varphi(x) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, x, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n).$$

Так как  $\varphi(0) = f(\tilde{\alpha}_i) = 1$  и  $\varphi(1) = f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 0$ , то  $\varphi(x) = \bar{x}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Пример 13.1.** Из немонотонной функции  $f(x, y, z) = (1001\ 1100)$  получить функцию  $\bar{x}$ . Построить логическую схему, реализующую функцию  $\bar{x}$  на логическом элементе  $f(x, y, z)$ .

**Решение.** На соседних наборах  $(000)$  и  $(001)$  нарушается монотонность функции  $f$ , т.к.  $1 = f(000) > f(001) = 0$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(0, 0, x)$ . Найдём все значения этой функции:  $\varphi(0) = f(0, 0, 0) = 1$ ;  $\varphi(1) = f(0, 0, 1) = 0$ . Получаем, что  $\varphi(x) = \bar{x}$ . Отрицание построено  $\bar{x} = f(0, 0, x)$ .

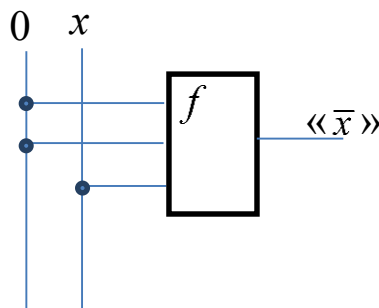


Рис. 13.1. Реализация функции  $\bar{x}$  на логическом элементе  $f(x, y, z)$ .

Реализация функции  $\bar{x}$  на логическом элементе  $f(x, y, z)$  показана на рис. 13.1.

## 14. Лемма о нелинейной функции

**Лемма 14.1 (о нелинейной функции).** Из любой нелинейной булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , подставляя вместо всех переменных функции  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, 0, 1$ , можно получить  $\varphi(x, y) = x \cdot y$  или  $\varphi(x, y) = \overline{x \cdot y}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$ . Рассмотрим полином Жегалкина этой функции. Из нелинейности функции следует, что в полиноме присутствуют слагаемые вида  $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots$ . Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что присутствует произведение  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots$ . Таким образом, полином Жегалкина данной функции имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot P_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 \cdot P_2(x_3, \dots, x_n) \oplus x_2 \cdot P_3(x_3, \dots, x_n) \oplus P_4(x_3, \dots, x_n),$$

где  $P_1(x_3, \dots, x_n) \neq 0$ . Иначе говоря, существуют  $a_3, a_4, \dots, a_n \in E_2 = \{0, 1\}$  такие, что  $P_1(a_3, a_4, \dots, a_n) = 1$ . Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x_1, x_2, a_3, a_4, \dots, a_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot b \oplus x_2 \cdot c \oplus d,$$

где  $b, c, d \in \{0, 1\}$ . Определим функцию  $h(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2) &= f(x_1 \oplus c, x_2 \oplus b, a_3, a_4, \dots, a_n) = \\ &= (x_1 \oplus c) \cdot (x_2 \oplus b) \cdot 1 \oplus (x_1 \oplus c) \cdot b \oplus (x_2 \oplus b) \cdot c \oplus d = \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 b \oplus x_2 c \oplus bc \oplus x_1 b \oplus bc \oplus x_2 c \oplus bc \oplus d = \\ &= x_1 x_2 \oplus bc \oplus d = \begin{cases} x_1 x_2, & bc \oplus d = 0; \\ \overline{x_1 x_2}, & bc \oplus d = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Пример 14.1.** Из нелинейной функции  $g(x, y, z) = (0010 \ 1000)$  получить функцию  $x \cdot y$ . Построить логи-

ческую схему, реализующую функцию  $x \cdot y$  на логическом элементе  $g(x, y, z)$ .

**Решение.** Составим таблицу функции  $g(x, y, z)$ :

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$g(x, y, z)$	0	0	1	0	1	0	0	0

Найдём полином Жегалкина.

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) &= \sum_{(a,b,c) | g(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\
 &= \sum_{\substack{(0,1,0) \\ (1,0,0)}} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\
 &= (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) = \\
 &= (x \oplus 1)(y \oplus 0)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 0)(y \oplus 1)(z \oplus 1) = \\
 &= (z \oplus 1)[(x \oplus 1)y \oplus x(y \oplus 1)] = (z \oplus 1)[xy \oplus y \oplus xy \oplus x] = \\
 &= (z \oplus 1)[y \oplus x] = xz \oplus yz \oplus x \oplus y.
 \end{aligned}$$

Итак,  $g(x, y, z) = xz \oplus yz \oplus x \oplus y$ .

При помощи полинома Жегалкина надо построить вспомогательную функцию вида  $xy \oplus bx \oplus cy \oplus d$ , где  $b, c, d \in \{0, 1\}$ . Придав переменной  $z$  значение  $y$ , получим

$$g(x, y, y) = x \cdot y \oplus y \cdot y \oplus x \oplus y = xy \oplus y \oplus x \oplus y = xy \oplus x.$$

Исходя из общего вида вспомогательной функции, в данном случае имеем  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ .

Определим функцию  $h(x, y)$ :

$$h(x, y) = g(x \oplus c, y \oplus b, y \oplus b) = g(x \oplus 0, y \oplus 1, y \oplus 1) = g(x, \bar{y}, \bar{y}).$$

Найдём значение функции  $h(x, y) = g(x, \bar{y}, \bar{y})$  на всех её наборах:



$x$	0	0	1	1
$y$	0	1	0	1
$h(x,y)$	$g(0,1,1)=0$	$g(0,0,0)=0$	$g(1,1,1)=0$	$g(1,0,0)=1$

Как видим, таблица функции  $h(x,y)$  совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно,  $h(x,y) = x \cdot y$ . Так как  $h(x,y) = g(x, \bar{y}, \bar{y})$  и  $h(x,y) = x \cdot y$ , то  $x \cdot y = g(x, \bar{y}, \bar{y})$ . Конъюнкция построена.

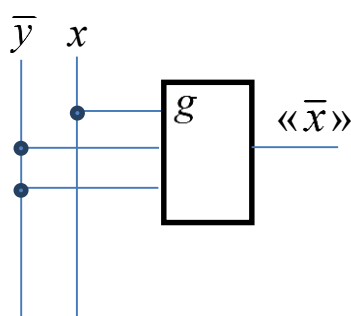


Рис. 14.1. Реализация конъюнкции на ЛЭ  $g(x,y,z)$ .

Реализация конъюнкции  $x \cdot y$  на логическом элементе  $g(x,y,z)$  показана на рис. 14.1.

## 15. Теорема Поста о полноте системы булевых функций

**Определение 15.1.** Система булевых функций  $A = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_2$  называется *полной*, если  $[A] = P_2$ .

**Утверждение 15.1.** Пусть  $A$  — замкнутый класс и  $[A] \neq P_2$ . Если  $B \subset A$ , то  $B$  - неполная система (подмножество неполной системы будет также неполной системой).

**Доказательство.** Пусть  $B \subset A$ , тогда  $[B] \subseteq [A] = A \neq P_2$  и  $[B] \neq P_2$ . Следовательно,  $B$  - неполная система. Утверждение доказано. □

**Теорема 15.2 (теорема Поста).** Система булевых функций  $A = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_2$  является полной в  $P_2$  тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из следующих классов:  $T_0, T_1, S, M, L$ .

**Доказательство.** Необходимость докажем от противного. Пусть  $A$  — полная система (т.е.  $[A] = P_2$ ) и  $K$  — любой из классов  $T_0, T_1, S, M, L$ . Предположим, что  $A \subseteq K$ , тогда  $[A] \subseteq [K] = K \neq P_2$  и  $[A] \neq P_2$ , т.е.  $A$  — неполная система. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение, что система содержится в одном из классов  $T_0, T_1, S, M, L$ , неверное. Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть  $A \not\subseteq T_0, A \not\subseteq T_1, A \not\subseteq S, A \not\subseteq M, A \not\subseteq L$ . Тогда в  $A$  существуют функции

$$f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_S \notin S, f_M \notin M, f_L \notin L.$$

Достаточно показать, что  $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_S, f_M, f_L] = P_2$ . Разобьём доказательство на три части: получение отрицания, констант и конъюнкции.

а) Получение  $\bar{x}$ .

Рассмотрим функцию  $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$  и введём функцию  $\varphi_0(x) = f_0(x, x, \dots, x)$ . Так как функция  $f_0$  не сохраняет нуль, то  $\varphi_0(0) = f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$ . Возможны два случая: либо  $\varphi_0(1) = 0$  и  $\varphi_0(x) = \bar{x}$ , либо  $\varphi_0(1) = 1$  и  $\varphi_0(x) = 1$ . Если получим искомого отрицание, то построение завершено. Иначе рассмотрим функцию  $f_1(x_1, \dots, x_n) \notin T_1$  и аналогичным образом введём функцию  $\varphi_1(x) = f_1(x, x, \dots, x)$ . Так как функция  $f_1$  не сохраняет единицу, то  $\varphi_1(1) = f_1(1, 1, \dots, 1) = 0$ . Возможны также два случая: либо  $\varphi_1(0) = 1$  и  $\varphi_1(x) = \bar{x}$ , либо  $\varphi_1(0) = 0$  и  $\varphi_1(x) = 0$ . Если получим отрицание, то построение завершено. Если же в обоих случаях получились константы, то применяем лемму о немонотонной функции. Согласно данной лемме, если подставить в функцию  $f_M \notin M$  вме-

сто всех переменных константы и тождественные функции, то можно получить отрицание. Таким образом, отрицание получено.

б) *Получение констант 0 и 1.* Имеем функцию  $f_S \notin S$ . Согласно лемме о несамодвойственной функции, подставляя вместо всех переменных функции  $f_S$  отрицание, которое получено в пункте а), и тождественную функцию, можно получить константы:  $[0, 1] \subseteq [f_S, \bar{x}]$ . Константы получены.

в) *Получение конъюнкции  $x \cdot y$ .* Имеем функцию  $f_L \notin L$ . Согласно лемме о нелинейной функции, подставляя в функцию  $f_L$  вместо всех переменных константы и отрицания (которые были получены на предыдущих шагах доказательства), можно получить либо конъюнкцию, либо отрицание конъюнкции. Однако на первом этапе отрицание уже получено, следовательно, всегда можно получить конъюнкцию:  $[xy, \bar{xy}] \subseteq [f_L, 0, 1, \bar{x}]$ . Конъюнкция получена.

В результате получили, что  $[f_0, f_1, f_S, f_M, f_L] \supseteq [xy, \bar{x}] = P_2$ . Последнее равенство следует из пункта 2 теоремы 9.3. В силу леммы 9.2 достаточность доказана.

Теорема доказана.  $\square$

**Пример.15.1.** Даны функции:  $f(x, y, z) = (1001\ 0100)$ ;  $g(x, y, z) = (1001\ 0110)$ .

1. Можно ли из функции  $f(x, y, z)$  с помощью суперпозиций получить  $g(x, y, z)$ ?

2. Верно ли, что  $f(x, y, z) \in [g]$ ?

**Решение.**

Выпишем таблицу функций  $f$  и  $g$ .

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	1	0	0	1	0	1	0	0
$g$	1	0	0	1	0	1	1	0

1. Исследуем функцию  $f(x, y, z)$ . Проверим  $f(x, y, z)$  на принадлежность классам Поста.

$$f(0,0,0)=1 \Rightarrow f \notin T_0,$$

$$f(1,1,1)=0 \Rightarrow f \notin T_1.$$

Так как наборы  $(0,0,1)$  и  $(1,1,0)$  противоположные и  $f(0,0,1)=f(1,1,0)=0$ , то  $f \notin S$ .

Для наборов  $(0,0,0) \preceq (0,0,1)$  имеем  $f(0,0,0) > f(0,0,1)$ , значит  $f \notin M$ .

Найдём полином Жегалкина для  $f(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{(a,b,c) | f(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\ &= \sum_{\substack{(000) \\ (011) \\ (101)}} (1 \oplus \bar{a})(1 \oplus \bar{b})(1 \oplus \bar{c}) = \\ &= (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{1}) \oplus \\ &\oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{1}) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus \\ &\oplus x(y \oplus 1)z = (x \oplus 1)[(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus yz] \oplus xyz \oplus xz = \\ &= (x \oplus 1)[yz \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus yz] \oplus xyz \oplus xz = \\ &= (x \oplus 1)[y \oplus z \oplus 1] \oplus xyz \oplus xz = xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus xz = \\ &= xyz \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1. \end{aligned}$$

Так как в полиноме Жегалкина

$$f(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1$$

присутствуют конъюнкции, то  $f \notin L$ .

Результаты анализа функции  $f(x, y, z)$  запишем в критериальную таблицу:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$f(x, y, z)$	-	-	-	-	-

Строки таблицы соответствуют функциям исследуемого множества булевых функций, а столбцы - классам Поста. Знак «+» (плюс) в клетке таблицы означает, что функция принадлежит классу Поста, знак «-» (минус) - не принадлежит.

Функция  $f(x, y, z)$  не принадлежит ни одному из классов Поста, значит, система функций  $\{f\}$  является функционально полным классом. Поэтому с помощью суперпозиций из функции  $f(x, y, z)$  можно получить любую булеву функцию, в частности  $g(x, y, z)$ .

2. Проверяем функцию  $g(x, y, z)$  на принадлежность классам Поста.

$$g(0,0,0)=1 \Rightarrow g \notin T_0, \quad g(1,1,1)=0 \Rightarrow g \notin T_1.$$

Так как на противоположных наборах

$$1 = g(0,0,0) \neq g(1,1,1) = 0, \quad 0 = g(0,0,1) \neq g(1,1,0) = 1,$$

$$0 = g(0,1,0) \neq g(1,0,1) = 1, \quad 1 = g(0,1,1) \neq g(1,0,0) = 0,$$

то  $g \in S$ .

Для наборов  $(0,0,0) \preceq (0,0,1)$  имеем  $g(0,0,0) > g(0,0,1)$ , значит  $g \notin M$ .

Найдём полином Жегалкина для функции  $g(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \sum_{(a,b,c) \mid g(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\ &= \sum_{\substack{(000) \\ (011) \\ (101) \\ (110)}} (1 \oplus \bar{a})(1 \oplus \bar{b})(1 \oplus \bar{c}) = \\ &= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) = \\ &= (x \oplus 1)[(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus yz] \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy = \\ &= (x \oplus 1)[yz \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus yz] \oplus xz \oplus xy = \\ &= (x \oplus 1)[y \oplus z \oplus 1] \oplus xz \oplus xy = xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus xz \oplus xy = \\ &= x \oplus y \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Так как в полиноме Жегалкина  $g(x, y, z) = x \oplus y \oplus z \oplus 1$  нет конъюнкций, то  $g \in L$ .

Критериальная таблица для функции  $g$  имеет вид:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$g(x, y, z)$	-	-	+	-	+

Система  $\{g\}$  не является функционально полной, так как  $g \in S$ , поэтому  $f \notin [g]$ .

## 16. Функциональная полнота в слабом смысле

Лемма о нелинейной функции и лемма о немонотонной функции позволяют получить все булевы функции с помощью немонотонных функций, нелинейных функций и констант. Это ещё не функциональная полнота в обычном смысле, так как константы предполагаются данными с самого начала. Однако такое предположение часто бывает оправданным в различных приложениях и прежде всего в синтезе логических схем, так как при схемной реализации константы 0 и 1 специальных элементов не требуют. Поэтому имеет смысл ввести ослабленное понятие функциональной полноты.

**Определение 16.1.** Система функций  $A = \{f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_2$  называется *функционально полной в слабом смысле*, если любая булева функция может быть представлена формулой над системой  $A \cup \{0, 1\}$ , т.е. является суперпозицией констант и функций из  $A$ .

**Теорема 16.1.** Для того чтобы система функций  $A$  была функционально полной в слабом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну немонотонную и хотя бы одну нелинейную функции.

**Доказательство. Необходимость.** Докажем от противного. Пусть  $A$  функционально полная система. Предположим, что  $A$  не содержит немонотонную или нелинейную функции. Так как

классы монотонных и линейных функций замкнуты и содержат константы 0 и 1, то немонотонную или нелинейную функции нельзя получить суперпозицией функций из  $A$  и констант, т.е.  $A$  не функционально полная система. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверное, и необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть  $A$  содержит немонотонную и нелинейную функции. Тогда по лемме о немонотонной функции, подставляя в функцию  $f_M \notin M$  вместо всех переменных константы и тождественные функции, можно получить отрицание  $\bar{x}$ . По лемме о нелинейной функции, подставляя в функцию  $f_L \notin L$  вместо всех переменных константы и отрицания, можно получить либо конъюнкцию, либо отрицание конъюнкции. Однако на первом этапе отрицание уже получено, следовательно, всегда можно получить конъюнкцию.

Система  $\{\bar{x}, xy\} \cup \{0, 1\}$  - функционально полная. Так как  $\{\bar{x}, xy\} \subset A$  и  $\{\bar{x}, xy\} \cup \{0, 1\} \subset A \cup \{0, 1\}$ , то  $A \cup \{0, 1\}$  - функционально полная система, следовательно,  $A$  - функционально полная система в слабом смысле.

Теорема доказана.  $\square$

### **Пример 16.1.**

1. Для функций  $f(x, y, z) = (0010\ 1000)$  и  $g(x, y, z) = (1001\ 0010)$  выяснить вопрос об их принадлежности классам  $T_0, T_1, L, S, M$ .

2. В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный класс, то:

- выразить из неё с помощью суперпозиций функции 0, 1,  $\bar{x}$ ,  $xy$ ;

- реализовать функции 0, 1,  $\bar{x}$ ,  $xy$  на логических элементах функции, представляющей функционально полный класс.

3. В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный в слабом смысле класс, то:

- выразить из неё с помощью суперпозиций и фиксирования переменных функции  $\bar{x}$ ,  $xy$ ;

- реализовать функции  $\bar{x}$ ,  $xu$  на логических элементах функции, представляющей функционально полный в слабом смысле класс.

**Решение.**

1. Для функций  $f$  и  $g$  составим таблицы истинности:

$x$	0	0	0	0	1	1	1	1
$y$	0	0	1	1	0	0	1	1
$z$	0	1	0	1	0	1	0	1
$f$	0	0	1	0	1	0	0	0
$g$	1	0	0	1	0	0	1	0

Исследуем функцию  $f(x, y, z)$ . Проверим  $f(x, y, z)$  на принадлежность классам Поста.

$$f(0,0,0)=0 \Rightarrow f \in T_0, f(1,1,1)=0 \Rightarrow f \notin T_1.$$

Так как наборы  $(0,0,0)$  и  $(1,1,1)$  противоположны, и  $f(0,0,0) = f(1,1,1) = 0$ , то  $f \notin S$ .

Для наборов  $(0,1,0) \preceq (0,1,1)$  имеем  $f(0,1,0) > f(0,1,1)$ , значит  $f \notin M$ .

Найдём полином Жегалкина для  $f(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{(a,b,c) \mid f(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\ &= \sum_{\substack{(010) \\ (100)}} (1 \oplus \bar{a})(1 \oplus \bar{b})(1 \oplus \bar{c}) = \\ &= (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) = \\ &= (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) = \\ &= xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x = \\ &= xz \oplus yz \oplus x \oplus y \end{aligned}$$

Следовательно  $P_f = xz \oplus yz \oplus x \oplus y$ .

Так как полином Жегалкина функции  $f$  содержит конъюнкцию, то  $f \notin L$ .



Для функции  $f$  составим критериальную таблицу:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$f(x, y, z)$	+	-	-	-	-

Функция  $f$  принадлежит классу  $T_0$ , поэтому система  $\{f\}$  не является функционально полным классом. Так как  $f \notin M$  и  $f \notin L$ , то  $\{f\}$ - функционально полный в слабом смысле класс.

Исследуем  $g(x, y, z)$  на принадлежность классам Поста.

$$g(0,0,0)=1 \Rightarrow g \notin T_0, \quad g(1,1,1)=0 \Rightarrow g \notin T_1.$$

Наборы  $(1,0,1)$  и  $(0,1,0)$  противоположны, и  $g(1,0,1) = g(0,1,0) = 0$ , следовательно,  $g \notin S$ .

Для наборов  $(0,0,0) \preceq (0,0,1)$  имеем  $g(0,0,0) > g(0,0,1)$ , поэтому  $g \notin M$ .

Найдём полином Жегалкина функции  $g(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \sum_{(a,b,c) | g(a,b,c)=1} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c}) = \\ &= \sum_{\substack{(000) \\ (011) \\ (110)}} (1 \oplus \bar{a})(1 \oplus \bar{b})(1 \oplus \bar{c}) = \\ &= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus xy(z \oplus 1) = \\ &= xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus yz \oplus xy = \\ &= 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xz \oplus xyz. \end{aligned}$$

Следовательно,  $P_g = 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xz \oplus xyz$ .

Так как полином Жегалкина функции  $g$  содержит конъюнкцию, то  $g \notin L$ .

Результаты анализа функции  $g(x, y, z)$  запишем в критериальную таблицу:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$g(x, y, z)$	-	-	-	-	-

Итак, функция  $g(x, y, z)$  не принадлежит ни одному из пяти классов Поста, значит, система функций  $\{g\}$  является функционально полным классом.

2. Так как система функций  $\{g\}$  является функционально полным классом, то выразим из неё с помощью суперпозиций функции  $\bar{x}$ , 0, 1,  $x$ ;

Построим отрицание  $\bar{x}$ .

Рассмотрим функцию  $s(x) = g(x, x, x)$ . Найдём все значения функции  $s(x)$ :

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = g(0, 0, 0) = 1 \\ s(1) = g(1, 1, 1) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow s(x) = \bar{x}.$$

Получили, что  $s(x) = g(x, x, x)$  и  $s(x) = \bar{x}$ , поэтому

$$\bar{x} = g(x, x, x).$$

Отрицание построено.

Реализация отрицания  $\bar{x}$  на логическом элементе функции  $g(x, y, z)$  показана на рис. 16.1.

Строим константу 0. Так как  $g \notin S$ , то найдём пару противоположных наборов  $(0, 1, 0)$  и  $(1, 0, 1)$ , на которых функция  $g$  равна 0. Выберем набор с наибольшим количеством единиц. В нашем случае  $(1, 0, 1)$ , и введём функцию  $o(x)$ :

$$o(x) = g(x^1, x^0, x^1) = g(x, \bar{x}, x) = g(x, g(x, x, x), x).$$

Найдём значения функции  $o(x) = g(x, g(x, x, x), x)$  на всех её наборах:

$$o(0) = g(0, g(0, 0, 0), 0) = g(0, 1, 0) = 0;$$

$$o(1) = g(1, g(1, 1, 1), 1) = g(1, 0, 1) = 0.$$

Получаем, что  $o(x) = 0$ .

Так как  $o(x) = 0$  и  $o(x) = g(x, g(x, x, x), x)$ , то  

$$0 = g(x, g(x, x, x), x).$$

Константа 0 построена.

Реализация константы 0 на логических элементах функции  $g(x, y, z)$  показана на рис. 16.1.

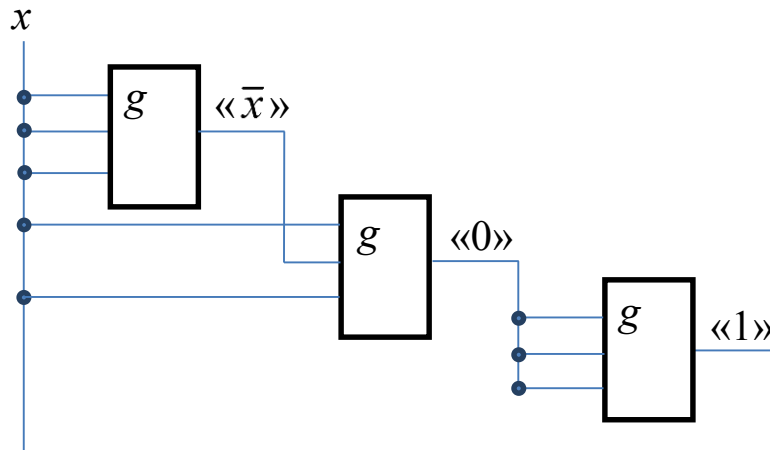


Рис. 16.1. Реализация функций  $\bar{x}$ , 0, 1 на логических элементах функции  $g(x, y, z)$ .

Для получения константы 1 возьмём отрицание от функции  $o(x)$  и обозначим полученную функцию  $e(x)$ .

$$e(x) = \overline{o(x)} = \overline{g(x, g(x, x, x), x)} = \\ = g[g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x)]$$

Итак, константа 1 получена:

$$1 = g[g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x)].$$

Реализация константы 1 на логических элементах функции  $g(x, y, z)$  показана на рис. 16.1.

Для построения конъюнкции из полинома Жегалкина строим вспомогательную функцию вида  $xy \oplus bx \oplus cy \oplus d$ , где  $b, c, d \in \{0, 1\}$ . Например, можно сделать так:

$$g(x, y, 1) = 1 \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus x \cdot 1 \oplus xy \cdot 1 = xy \oplus y \oplus 1.$$

В результате получили выражение, у которого  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ .

Введём функцию  $k(x, y)$ :

$$\begin{aligned} k(x, y) &= g(x \oplus c, y \oplus b, 1) \oplus bc \oplus d = g(x \oplus 1, y \oplus 0, 1) = g(\bar{x}, y, 1) = \\ &= g\{g(x, x, x), y, g[g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x), g(x, g(x, x, x), x)]\}. \end{aligned}$$

Найдём значения функции  $k(x, y)$  на всех её наборах:

$$\begin{aligned} k(0, 0) &= \\ &= g\{g(0, 0, 0), 0, g[g(0, g(0, 0, 0), 0), g(0, g(0, 0, 0), 0), g(0, g(0, 0, 0), 0)]\} = \\ &= g\{1, 0, g[g(0, 1, 0), g(0, 1, 0), g(0, 1, 0)]\} = g(1, 0, g(0, 0, 0)) = \\ &= g(1, 0, 1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(0, 1) &= \\ &= g\{g(0, 0, 0), 1, g[g(0, g(0, 0, 0), 0), g(0, g(0, 0, 0), 0), g(0, g(0, 0, 0), 0)]\} = \\ &= g\{1, 1, g[g(0, 1, 0), g(0, 1, 0), g(0, 1, 0)]\} = g(1, 1, g(0, 0, 0)) = \\ &= g(1, 1, 1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(1, 0) &= \\ &= g\{g(1, 1, 1), 0, g[g(1, g(1, 1, 1), 1), g(1, g(1, 1, 1), 1), g(1, g(1, 1, 1), 1)]\} = \\ &= g\{0, 0, g[g(1, 0, 1), g(1, 0, 1), g(1, 0, 1)]\} = g(0, 0, g(0, 0, 0)) = \\ &= g(0, 0, 1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(1, 1) &= \\ &= g\{g(1, 1, 1), 1, g[g(1, g(1, 1, 1), 1), g(1, g(1, 1, 1), 1), g(1, g(1, 1, 1), 1)]\} = \\ &= g\{0, 1, g[g(1, 0, 1), g(1, 0, 1), g(1, 0, 1)]\} = g(0, 1, g(0, 0, 0)) = \\ &= g(0, 1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Составим таблицу функции  $k(x, y)$ :

$x$	0	0	1	1
$y$	0	1	0	1
$k(x,y)$	0	0	0	1

Как видим, таблица функции  $k(x,y)$  совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно,  $k(x,y) = x \cdot y$ .

Так как  $k(x,y) = x \cdot y$  и

$$k(x,y) =$$

$$= g\left\{g(x,x,x), y, g\left[g(x, g(x,x,x), x), g(x, g(x,x,x), x), g(x, g(x,x,x), x)\right]\right\},$$

то

$$x \cdot y =$$

$$= g\left\{g(x,x,x), y, g\left[g(x, g(x,x,x), x), g(x, g(x,x,x), x), g(x, g(x,x,x), x)\right]\right\},$$

Конъюнкция построена.

Реализация конъюнкции  $x \cdot y$  на логическом элементе  $g(x,y,z)$  показана на рис. 16.2.

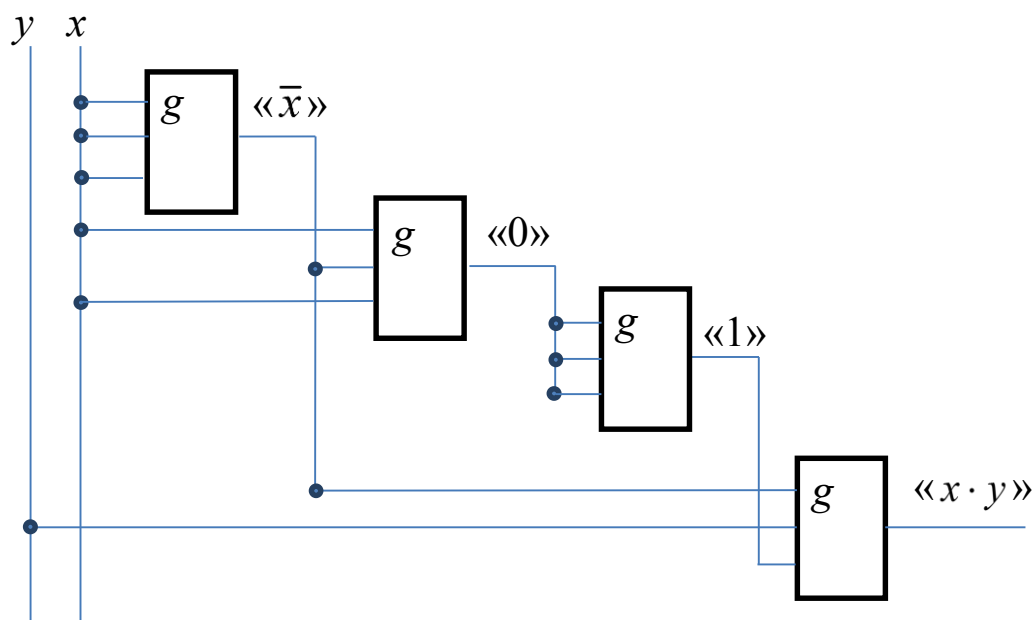


Рис. 16.2. Реализация конъюнкции  $x \cdot y$  на логических элементах функции  $g(x,y,z)$ .

3. С помощью фиксирования переменных выразим из функции  $f$  функцию  $\bar{x}$ . Найдём два соседних наборах  $(0,1,0)$  и  $(0,1,1)$ , на которых нарушается монотонность. Определим функцию  $\varphi(x) = f(0,1,x)$  и найдём её значения:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = f(0,1,0) = 1 \\ \varphi(1) = f(0,1,1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}.$$

Так как  $\varphi(x) = f(0,1,x)$  и  $\varphi(x) = \bar{x}$ , то  $\bar{x} = f(0,1,x)$ . Отрицание построено.

Реализация функции  $\bar{x}$  на логическом элементе  $f(x,y,z)$  показана на рис. 16.3.

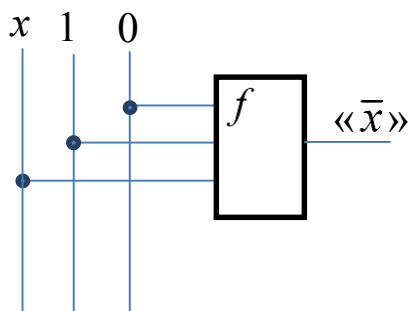


Рис. 16.3. Реализация  $\bar{x}$  на ЛЭ  $f(x,y,z)$ .

Из полинома Жегалкина строим вспомогательную функцию вида  $xy \oplus bx \oplus cy \oplus d$ , где  $b, c, d \in \{0,1\}$ . Например, можно сделать так:

$$f(1,y,x) = 1 \cdot x \oplus xy \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1.$$

В этом случае  $b = 1, c = 1, d = 1$ .

Введём функцию  $h(x,y)$ :

$$\begin{aligned} h(x,y) &= f(1, y \oplus b, x \oplus c) \oplus bc \oplus d = \\ &= f(1, \bar{y}, \bar{x}) = f(1, f(0,1,y), f(0,1,x)). \end{aligned}$$

Получили, что  $h(x,y) = f(1, f(0,1,y), f(0,1,x))$ . Найдём её значения на всех наборах:

$$h(0,0) = f(1, f(1,0,1), f(1,0,1)) = f(1,1,1) = 0;$$

$$h(0,1) = f(1, f(0,1,1), f(0,1,0)) = f(1,0,1) = 0;$$

$$h(1,0) = f(1, f(0,1,0), f(0,1,1)) = f(1,1,0) = 0;$$

$$h(1,1) = f(1, f(0,1,1), f(0,1,1)) = f(1,0,0) = 1.$$

Составим таблицу функции  $h(x, y)$ :

$x$	0	0	1	1
$y$	0	1	0	1
$h(x, y)$	0	0	0	1

Таблица функции  $h(x, y)$  совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно,  $h(x, y) = x \cdot y$ .

Так как  $h(x, y) = x \cdot y$  и  $h(x, y) = f(1, f(0,1, y), f(0,1, x))$ , то  $x \cdot y = f(1, f(0,1, y), f(0,1, x))$ . Конъюнкция построена.

Реализация конъюнкции  $x \cdot y$  на логическом элементе  $f(x, y, z)$  показана на рис. 16.4.

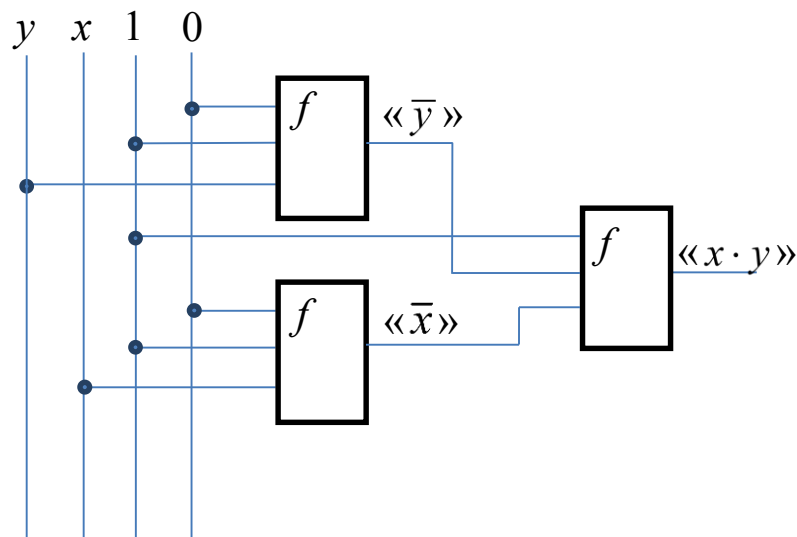


Рис. 16.4. Реализация конъюнкции  $x \cdot y$  на логическом элементе  $f(x, y, z)$ .

## 17. Теорема о максимальном числе булевых функций в базисе

**Определение 17.1.** Система булевых функций  $A \subseteq P_2$  называется базисом (в  $P_2$ ), если

$$1) [A] = P_2; 2) \forall f \in A ([A \setminus \{f\}] \neq P_2).$$

**Теорема 17.1.** Максимальное число булевых функций в базисе равно четырём.

**Доказательство.**

1) Докажем, что из любой полной системы можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырёх функций. Действительно, если  $A$  - полная система ( $[A] = P_2$ ), то согласно теореме Поста в ней существуют пять функций  $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_S \notin S, f_M \notin M, f_L \notin L$ . По теореме Поста система функций  $\{f_0, f_1, f_S, f_M, f_L\}$  полна. Рассмотрим функцию  $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$ , тогда  $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$ . Возможны два случая:

a)  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow f_0 \notin S \Rightarrow [f_0, f_1, f_M, f_L] = P_2$  и система  $\{f_0, f_1, f_M, f_L\}$  полна;

b)  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow f_0 \notin M, f_0 \notin T_1 \Rightarrow [f_0, f_S, f_L] = P_2$  и система  $\{f_0, f_S, f_L\}$  полна.

2) Покажем, что существует базис из четырёх функций. Действительно, рассмотрим систему функций  $\{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$ . Эта система функций полная, так как  $0 \notin T_1, 0 \notin S, 1 \notin T_0, xy \notin L, x \oplus y \oplus z \notin M$ . Однако, любая её подсистема не полна:

$$\{0, 1, xy\} \subseteq M;$$

$$\{0, 1, x \oplus y \oplus z\} \subseteq L;$$

$$\{0, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_0;$$

$$\{1, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_1.$$

Теорема доказана.  $\square$

С технической точки зрения выбор базиса эквивалентен выбору типов логических элементов, на которых может быть по-





Булев базис  $B_1 = \{\&, \vee, \neg\}$  позволяет реализовать любую булеву функцию, аналитическое выражение которой записано в виде ДНФ или КНФ.

В качестве примера построим логические схемы для булевой функции, ДНФ и КНФ которой имеют вид:  $f = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}$  и  $f = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$ .

Логическая схема для ДНФ функции  $f$  показана на рис. 17.1.1, для КНФ - на рис.17.1.2.

Для схемы на рис.17.1.1 цена по Квайну  $S_Q=10$ , задержка  $T=3\tau$ .

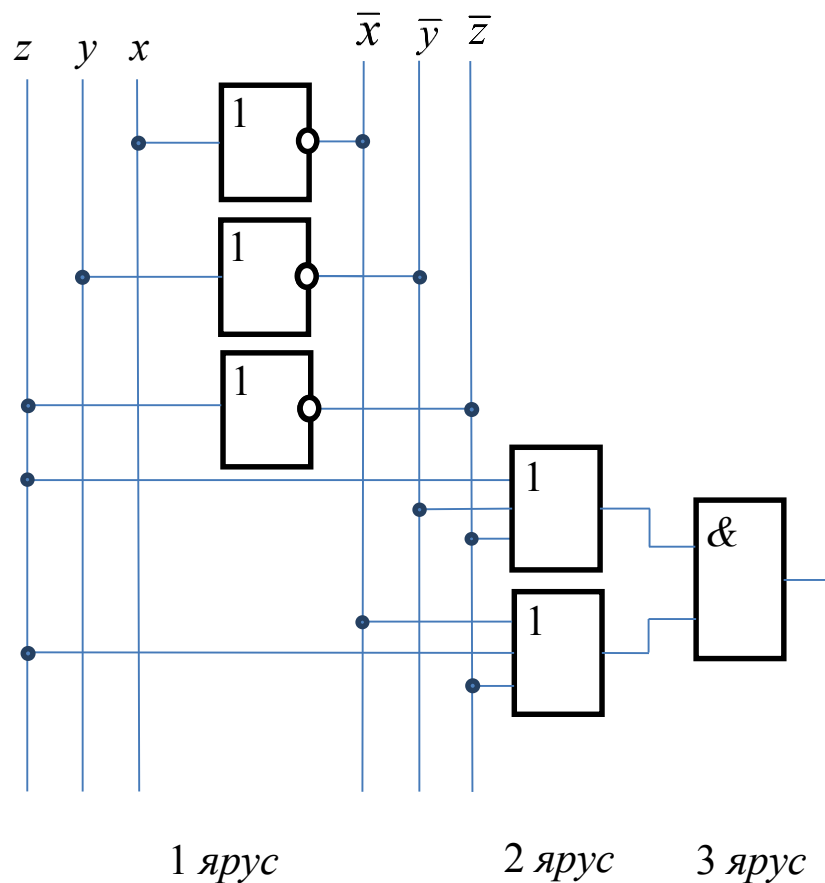


Рис. 17.1.2. Логическая схема, реализующая КНФ функции  $f$ .

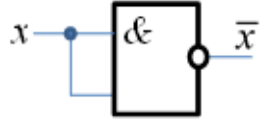
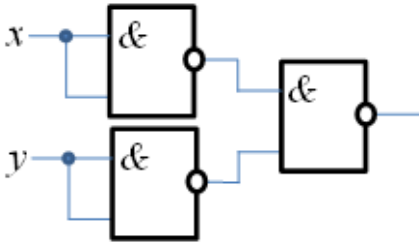
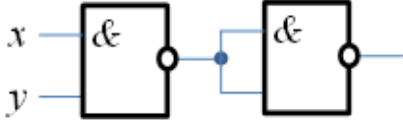
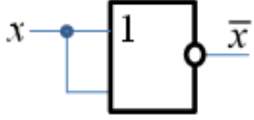
Для схемы на рис.17.1.2 цена по Квайну  $S_Q=11$ , задержка схемы  $T=3\tau$ .

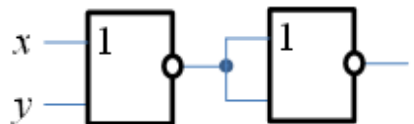
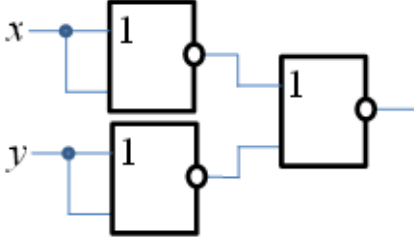
Сравнивая две полученные логические схемы, можно заметить, что в этом случае затраты на построение того или иного варианта схем практически одинаковы.

Булев базис является избыточной системой, так как возможно удаление из него некоторых функций. Например, используя законы де Моргана, можно удалить либо конъюнкцию, заменив её дизъюнкцией и отрицанием, либо дизъюнкцию, заменив её конъюнкцией и отрицанием.

В таблице 17.1.1 показан переход от базиса  $B_1 = \{\&, \vee, \neg\}$  к универсальным базисам  $B_3 = \{\downarrow\}$  и  $B_4 = \{|\}$ , приведены логические схемы реализации функций булева базиса на логических элементах «ИЛИ-НЕ» и «И-НЕ».

Таблица 17.1.1

Формулы преобразования функций базиса $B_1$ к универсальному базису $B_4$	Логические схемы реализации функций базиса $B_1$ на элементах И-НЕ
$\bar{x} = \overline{x \cdot x} = x   x$	
$x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \bar{x}   \bar{y} = (x   x)   (y   y)$	
$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{(x   y)} = (x   y)   (x   y)$	
Формулы преобразования функций базиса $B_1$ к универсальному базису $B_3$	Логические схемы реализации функций базиса $B_1$ на элементах ИЛИ-НЕ
$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$	

$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{(x \downarrow y)}$ $= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$	
$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{x \downarrow \overline{y}}$ $= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$	

При преобразовании формул ДНФ и КНФ булевой функции к соответствующему универсальному базису используются два технических приёма: двойное инвертирование исходного выражения или его части и применение правил Де-Моргана. Проиллюстрируем сказанное примерами.

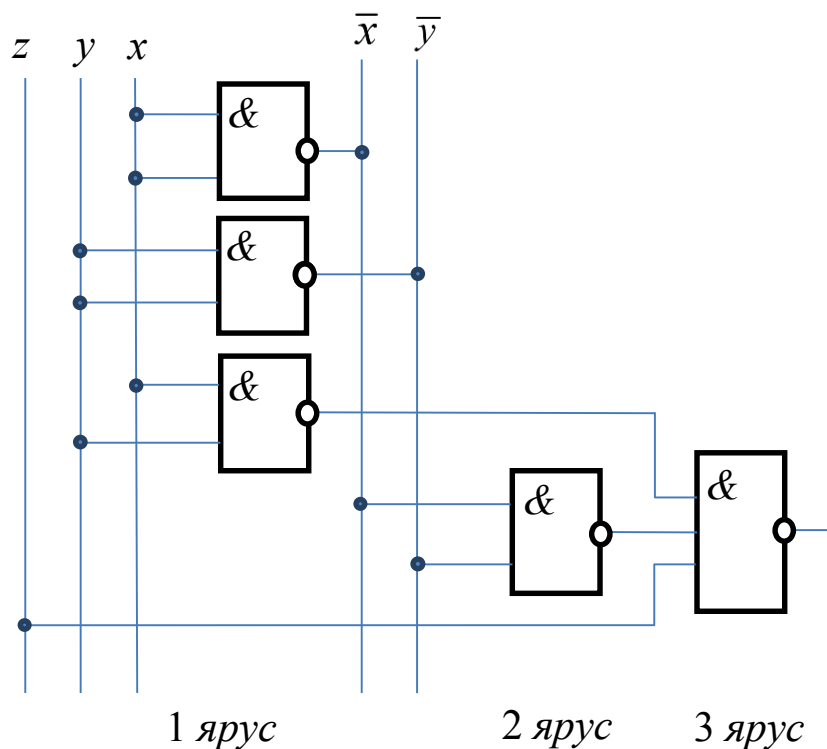


Рис. 17.1.3. Логическая схема, реализующая функцию  $f$  в базисе  $B_4 = \{\downarrow\}$ .

Согласно сформулированным выше приёмам, ДНФ рассмотренной ранее функции  $f$  в базисе  $B_4 = \{\downarrow\}$  примет вид:

$$f = xy \vee \overline{xy} \vee z = \overline{\overline{xy \vee z}} = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{z}} = \overline{\overline{xy}} \vee z = (x|y)|(\overline{x}|\overline{y})|z = (x|y)|((x|x)|(y|y))|z$$

Для компактности записи используется прежнее представление инверсии, при этом имеется в виду, что  $\overline{\overline{x}} = x \cdot x = x|x$ . Компактная формула функции  $f$  в базисе  $B_4 = \{|\}$  примет вид  $f = (x|y)|(\overline{x}|\overline{y})|z$ . Логическая схема, реализующая функцию  $f$  в базисе  $B_4$ , показана на рис. 17.1.3. Цена этой ЛС по Квайну  $S_Q=11$ , задержка  $T=3\tau$ .

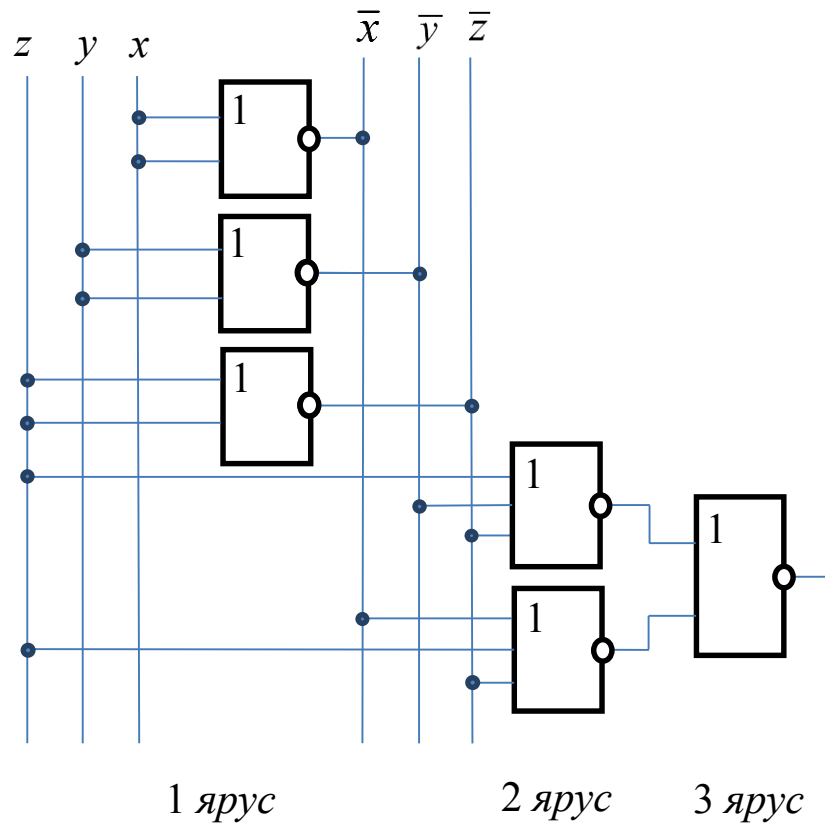


Рис. 17.1.4. Логическая схема, реализующая функцию  $f$  в базисе  $B_3 = \{\downarrow\}$ .

Согласно сформулированным выше приёмам, КНФ функции  $f$  в базисе  $B_3 = \{\downarrow\}$  примет вид:

$$f = (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = \overline{\overline{(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\overline{(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})}} = \overline{(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \downarrow (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})} = \\
&= (x \downarrow \bar{y} \downarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} \downarrow y \downarrow \bar{z}) = \\
&= (x \downarrow (y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y \downarrow (z \downarrow z))
\end{aligned}$$

Аналогично для компактности записи используется прежнее представление инверсии, где  $\bar{x} = x \vee x = x \downarrow x$ . Компактная формула функции  $f$  в базисе  $B_3 = \{\downarrow\}$  имеет вид  $f = (x \downarrow \bar{y} \downarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} \downarrow y \downarrow \bar{z})$ . Логическая схема, реализующая функцию  $f$  в базисе  $B_3$ , показана на рис. 17.1.4. Цена этой ЛС по Квайну  $S_Q=14$ , задержка  $T=3\tau$ .

## 18. Минимизация булевых функций

### 18.1 Общие принципы минимизации

СДНФ (СКНФ) является исходной формой представления булевой функции при построении логических схем. Однако схемы, построенные непосредственно по СДНФ (СКНФ), громоздки и содержат излишне много элементов. После преобразования СДНФ (СКНФ) к минимальному виду заданная функция реализуется более простой схемой (с меньшим числом логических элементов). Например, для реализации в булевом базисе функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданной СДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3,$$

понадобится девять логических элементов: 5 вентилях «ЗИ», один вентиль «БИЛИ» и три инвертора. Если упростить данную формулу путём добавления конъюнкции  $x_1 x_2 x_3$  и вынесения за скобки общих элементов,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \\
&= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3) \vee (x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3) = \\
&= \bar{x}_1 x_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1 x_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = \\
&= \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = x_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 x_2 = x_3 \vee x_1 x_2,
\end{aligned}$$

то получим новое представление булевой функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1 x_2.$$

Очевидно, что оно проще для реализации в булевом базисе, так как потребует только два элемента: один вентиль «2И» и один вентиль «2ИЛИ».

Таким образом, возникает задача наиболее простого представления булевых функций, известная как *задача минимизации булевых функций*. Сводится она к выбору рационального базиса и наиболее экономного представления функции в этом базисе.

В дальнейшем задачу минимизации будем рассматривать как задачу нахождения минимальной дизъюнктивной нормальной формы булевой функции.

## 18.2. Представление элементарных конъюнкций в формализованном виде. Операция склеивания

На множестве булевых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  элементарной конъюнкции  $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$  поставим в соответствие  $n$ -мерный *троичный вектор степеней*  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  по следующему правилу:

$$\sigma_j = \begin{cases} -, & \text{если переменная } x_j \text{ не входит в } K, \\ 1, & \text{если } x_j \text{ входит в } K, \\ 0, & \text{если } \bar{x}_j \text{ входит в } K. \end{cases}$$

Например, элементарной конъюнкции  $K = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5$  на множестве переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  соответствует 5-ти мерный троичный вектор степеней  $\tilde{\sigma} = (-01-0)$ .

Соответствие между множеством элементарных конъюнкций, зависящих от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и множеством  $n$ -мерных троичных векторов степеней взаимнооднозначно, так как троичному вектору степеней, состоящему из одних «прочерков»  $\tilde{\sigma} = (-, -, \dots, -)$ , соответствует «пустая» конъюнкция.

Если вместо элементарной конъюнкции записать её троичный вектор степеней, то говорят, что элементарная конъюнкция представлена в *формализованном виде*.

Будем рассматривать троичные векторы степеней с равным числом компонент и соответствующие им элементарные конъюнкции.

Отношение *равенства* троичных векторов степеней определяется как равенство одноимённых компонент.

Отношение *соседства по  $i$ -ой компоненте* означает отличие троичных векторов степеней только по  $i$ -ой компоненте, т.е.  $i$ -я компонента принимает значение 0 в одном из векторов и значение 1 – в другом, при этом значения остальных компонент попарно равны.

Пусть соседним троичным векторам степеней

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1 &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n), \\ \tilde{\sigma}_2 &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)\end{aligned}$$

соответствуют элементарные конъюнкции

$$\begin{aligned}K_1 &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot \bar{x}_i \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}, \\ K_2 &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot x_i \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n},\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}K_1 \vee K_2 &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot \bar{x}_i \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \vee \\ &\vee x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot x_i \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} = \\ &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} (\bar{x}_i \vee x_i) = \\ &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.\end{aligned}$$

Элементарной конъюнкции  $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}$ , полученной в результате склеивания, соответствует троичный вектор степеней

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, -, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n),$$

где символ "-" заменяет  $i$ -ю компоненту, значение которой у троичных векторов степеней  $\tilde{\sigma}_1$  и  $\tilde{\sigma}_2$  разное.



В данном случае говорят, что элементарные конъюнкции  $K_1$  и  $K_2$  склеиваются по переменной  $x_i$ , или к соседним троичным векторам степеней  $\tilde{\sigma}_1$  и  $\tilde{\sigma}_2$  применяется операция склеивания по  $i$ -ой компоненте.

Например, для соседних троичных векторов степеней  $\tilde{\sigma}_1 = (1001)$  и  $\tilde{\sigma}_2 = (1101)$  в результате операции склеивания получим:

$$\left. \begin{array}{l} 1001 \\ \underline{1101} \\ 1-01 \end{array} \right| \Rightarrow \tilde{\sigma} = (1-01).$$

Применить операцию склеивания к троичным векторам степеней  $\tilde{\sigma}_3 = (1011)$  и  $\tilde{\sigma}_4 = (1101)$  нельзя, так как они различаются двумя компонентами и соседними не являются.

**Пример. 18.2.1.** Упростить выражение

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3,$$

выписав все элементарные конъюнкции в формализованном виде и применяя операцию склеивания троичных векторов степеней.

**Решение.** Запишем элементарные конъюнкции в формализованном виде:

Элементарная конъюнкция	Троичный вектор степеней
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = x_1^0 x_2^0 x_3^1$	(001)
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1^0 x_2^0 x_3^0$	(000)
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1^1 x_2^0 x_3^0$	(100)
$x_1 x_2 \bar{x}_3 = x_1^1 x_2^1 x_3^0$	(110)

Применяя операцию склеивания к парам соседних троичных векторов степеней, получим

$$\begin{array}{ccc} 001 & & 100 \\ \underline{000} & \text{и} & \underline{110} \\ 00- & & 1-0 \end{array}$$

Полученные вектора  $(00-)$  и  $(1-0)$  дальше склеивать нельзя. Им соответствуют конъюнкции  $\bar{x}_1\bar{x}_2$  и  $x_1\bar{x}_3$ , поэтому

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3.$$

### 18.3. Сокращённая ДНФ

**Определение 18.3.1.** Элементарная конъюнкция  $K$  называется *импликантой* функции  $f$ , если на произвольном наборе аргументов выполняется равенство:  $K \vee f = f$ .

Из определения вытекает:

- если существует набор аргументов  $\tilde{\alpha}$ , на котором функция  $f(\tilde{\alpha}) = 0$ , то на этом наборе и импликанта  $K(\tilde{\alpha}) = 0$ ;

- если существует набор аргументов  $\tilde{\beta}$ , на котором импликанта  $K(\tilde{\beta}) = 1$ , то на этом наборе и функция  $f(\tilde{\beta}) = 1$ .

**Утверждение 18.3.1 (свойство импликант).** Если  $K_1$  и  $K_2$  - импликанты функции  $f$ , то их дизъюнкция  $(K_1 \vee K_2)$  также является импликантой функции  $f$ .

**Доказательство.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  - импликанты функции  $f$ , тогда на произвольном наборе аргументов выполняются равенства  $K_1 \vee f = f$  и  $K_2 \vee f = f$ . Так как  $(K_1 \vee K_2) \vee f = K_1 \vee (K_2 \vee f) = K_1 \vee f = f$ , то  $(K_1 \vee K_2)$  также является импликантой функции  $f$ . Утверждение доказано.  $\square$

**Определение 18.3.2.** Импликанта  $K$  функции  $f$  называется *простой*, если элементарная конъюнкция, получающаяся из  $K$  выбрасыванием любой переменной, не является импликантой функции  $f$ .

**Теорема 18.3.2.** Всякая функция реализуется дизъюнкцией всех своих простых импликант.

**Доказательство.** Пусть  $D = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$  - дизъюнкция всех простых импликант функции  $f(\tilde{x})$  и  $\tilde{\alpha}$  - произвольный набор аргументов.

Если  $D(\tilde{\alpha})=1$ , то найдётся дизъюнктивное слагаемое  $K_i(\tilde{\alpha})=1$ , что влечёт  $f(\tilde{\alpha})=1$ , так как  $K_i$  - простая импликанта.

Если  $f(\tilde{\alpha})=1$ , то в СДНФ для функции  $f$  найдётся элементарная конъюнкция  $K(\tilde{\alpha})=1$ . Одна из простых импликант  $K_j$  функции  $f$  получается из  $K$  выбрасыванием некоторых множителей, поэтому  $K_j(\tilde{\alpha})=1$ . Так как  $K_j$  является одним из слагаемых выражения  $D$ , то  $D(\tilde{\alpha})=1$ .

Получили, что для произвольного набора аргументов  $\tilde{\alpha}$  выполняется равенство  $f(\tilde{\alpha})=D(\tilde{\alpha})$ . Следовательно, всякая функция реализуется дизъюнкцией всех своих простых импликант, и теорема доказана.  $\square$

**Определение 18.3.3.** *Сокращённой ДНФ* называется дизъюнкция всех простых импликант функции  $f$ .

Рассмотрим алгоритм построения сокращённой ДНФ из СДНФ (метод Квайна-МакКласки).

Этот метод нахождения множества всех простых импликант был предложен первоначально Квайном и усовершенствован МакКласки. Метод предполагает, что функция  $f$  задана первоначально в виде СДНФ.

1. Для нахождения простых импликант, выписываем все элементарные конъюнкции из СДНФ функции  $f$  в формализованном виде. Выписываем троичные вектора степеней в столбец, располагая по порядку возрастания числа единиц в их компонентах. В результате множество троичных векторов степеней разбивается на соседние классы, между которыми определена операция склеивания.

2. Между троичными векторами степеней из соседних классов проводим всевозможные склеивания. Результаты записываем в новый столбец справа, а вектора, участвовавшие в склеивании, помечаем «+».

3. К полученному столбцу ещё раз применяем шаг 2.

4. В результате операций склеивания остаются троичные вектора степеней, которые дальше склеивать нельзя, выписываем их.

5. Добавляем к выписанным троичным векторам степеней вектора, не участвовавшие в склеиваниях (они не помечены знаком «+»). Получаем множество троичных векторов степеней, которым соответствуют все простые импликанты функции  $f$ .

6. Дизъюнкция всех простых импликант даёт сокращённую ДНФ.

**Пример 18.3.1.** Для функции, заданной СДНФ

$$f(x, y, z, w) = \overline{x}yzw \vee x\overline{y}zw \vee \overline{x}y\overline{z}w \vee \overline{x}yz\overline{w} \vee \overline{x}yzw \vee x\overline{y}z\overline{w} \vee x\overline{y}zw \vee x\overline{y}z\overline{w} \vee \overline{x}y\overline{z}w \vee \overline{x}y\overline{z}\overline{w} \vee \overline{x}yz\overline{w},$$

методом Квайна-МакКласки найти сокращённую ДНФ.

**Решение.**

Для нахождения простых импликант выписываем элементарные конъюнкции в формализованном виде.

Таблица 18.3.1.

1. 0000 +	1. 000- 1-2 +	1. -00- 1-7,
2. 0001 +	2. 0-00 1-3 +	2. --00 2-9, 3-8
3. 0100 +	3. -000 1-4 +	3. -0-1 4-11, 6-10
4. 1000 +	4. 00-1 2-5 +	4. 1-0- 9-12
5. 0011 +	5. 01-0 3-6	
6. 0110 +	6. -001 2-7 +	
7. 1001 +	7. 100- 4-7 +	
8. 1100 +	8. -100 3-8 +	
9. 1011 +	9. 1-00 4-8 +	
10. 1101 +	10. -011 5-9 +	
	11. 10-1 7-9 +	
	12. 1-01 7-10 +	
	13. 110- 8-10 +	
<b>I столбец</b>	<b>II столбец</b>	<b>III столбец</b>

Троичные вектора степеней располагаем в первом столбце таблицы 18.3.1 в порядке возрастания числа единиц в их компонентах. Множество векторов разбивается на четыре класса. Между соседними классами проводим операцию склеивания, а ре-

результаты записываем во второй столбец таблицы справа. Во втором столбце получается три соседних класса, между которыми проводим операцию склеивания. Результаты записываем в третий столбец таблицы. В третьем столбце получаются троичные вектора степеней, которые дальше склеивать нельзя.

Множество троичных векторов степеней, которым соответствуют все простые импликанты функции  $f$ , включает:

- вектора, полученные в результате операций склеивания в третьем столбце таблицы, которые дальше склеивать нельзя;
- вектора, не участвовавшие в склеиваниях (они не помечены знаком «+»).

В таблице 18.3.2 показано соответствий между полученными троичными векторами степеней и простыми импликантами:

Таблица 18.3.2.

	Троичные вектора степеней	Простые импликанты
1.	-00-	$\overline{yz}$
2.	--00	$\overline{zw}$
3.	-0-1	$\overline{yw}$
4.	1-0-	$\overline{xz}$
5.	01-0	$\overline{xuw}$

Сокращённая ДНФ данной булевой функции имеет вид:

$$f(x, y, z, w) = \overline{x}uw \vee \overline{yz} \vee \overline{zw} \vee \overline{yw} \vee \overline{xz}.$$

#### 18.4. Минимальная ДНФ

Проблема минимизации булевых функций состоит в том, чтобы построить ДНФ, у которой число вхождений элементарных конъюнкций минимально, по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими булеву функцию.

Ранг элементарной конъюнкции  $K$  обозначим  $r(K)$ .

**Определение 18.4.1.** Рассмотрим ДНФ функции  $f$

$$D^f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_S,$$

у которой  $K_i$  ( $i = \overline{1, S}$ ) – элементарная конъюнкция ранга  $r(K_i)$ .

Число  $r(D^f) = \sum_{i=1}^S r(K_i)$  называется *сложностью* ДНФ.

**Определение. 18.4.2.** *Минимальной* ДНФ (МДНФ) функции  $f$  (обозначают  $D_{\min}^f$ ) называется такая ДНФ, которая имеет наименьшую сложность среди всех ДНФ, равных функции  $f$ , т.е.  $r(D_{\min}^f) = \min_i r(D_i^f)$ .

**Пример 18.4.1.** Построить несколько ДНФ для функции  $f = (1110\ 1100)$ , и среди них указать минимальную ДНФ.

**Решение.**

$$D_1^f = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z, \quad r(D_1^f) = 15;$$

$$D_2^f = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z, \quad r(D_2^f) = 11;$$

$$D_3^f = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y}, \quad r(D_3^f) = 7;$$

$$D_4^f = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee x \bar{y}, \quad r(D_4^f) = 6;$$

$$D_5^f = \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z}, \quad r(D_5^f) = 3.$$

$$D_5^f \text{ - минимальная ДНФ, т.к. } r(D_5^f) = \min_{1 \leq i \leq 5} r(D_i^f) = 3.$$

**Теорема 18.4.1.** Если МДНФ функции  $f$  имеет вид  $D^f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_S$ , то все элементарные конъюнкции  $K_i$  ( $i = \overline{1, S}$ ) являются простыми импликантами.

**Доказательство.** Докажем от противного. Предположим, что МДНФ функции  $f$  имеет вид:  $D^f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_S$  и какая-то конъюнкция  $K_i$  не является простой импликантой, тогда её можно представить в виде произведения  $K_i = K_{i_1} \cdot K_{i_2}$ , где  $K_{i_1}$  – простая импликанта.

В этом случае можно получить ДНФ функции  $f$  вида:

$$D_1^f = K_1 \vee \dots \vee K_{i-1} \vee K_{i_1} \vee K_{i+1} \vee \dots \vee K_S.$$

Так как для рангов конъюнкций выполняется неравенство  $r(K_i) > r(K_{i_1})$ , то для сложностей ДНФ имеем  $r(D^f) > r(D_1^f)$ .

Таким образом,  $D^f$  не является минимальной ДНФ функции  $f$ . Получили противоречие. Следовательно, предположение, что МДНФ содержит конъюнкцию не являющуюся простой импликантой, неверное. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 18.4.2.** МДНФ булевой функции  $f$  либо совпадает с сокращённой ДНФ, либо получается из неё путём вычёркивания некоторых простых импликант.

## 18.5. Тупиковая ДНФ

Для решения вопроса о том, какие простые импликанты входят в МДНФ введём понятие тупиковой ДНФ.

**Определение 18.5.1.** Тупиковой ДНФ (ТДНФ) булевой функции  $f$  называется такая дизъюнкция простых импликант (т.е. часть сокращённой ДНФ), которая представляет данную функцию  $f$ , но не сохраняет этого свойства после отбрасывания любой простой импликанты.

Отметим, что устранение лишних простых импликант из сокращённой ДНФ булевой функции не является однозначным процессом, т. е. булева функция может иметь несколько различных тупиковых ДНФ. Поэтому для получения МДНФ функции  $f$  необходимо построить все тупиковые ДНФ функции  $f$ , а затем выбрать из них те, которые имеют наименьшую сложность.

При нахождении ТДНФ нужно учитывать, что не все простые импликанты из сокращённой ДНФ равноправны. Наиболее важную роль играют ядровые импликанты.

**Определение 18.5.2.** Простая импликанта  $K_i$  булевой функции  $f$  называется *ядровой*, если существует набор  $\tilde{\alpha}$ , на котором  $K_i(\tilde{\alpha}) = 1$ , а все остальные простые импликанты на этом наборе равны нулю.

**Определение 18.5.3.** Дизъюнкция всех ядровых импликант называется *ядром* булевой функции. Обозначают  $Y(\tilde{x})$ .

**Теорема 18.5.2.** Каждая тупиковая ДНФ функции  $f$  содержит ядро этой функции.

**Доказательство.** Докажем от противного. Если  $K_i$  - ядровая импликанта функции  $f$ , то существует набор  $\tilde{\alpha}$ , на котором  $K_i(\tilde{\alpha})=1$ . Тогда значения всех остальных простых импликант функции  $f$  на наборе  $\tilde{\alpha}$  равны нулю. Предположим, что  $K_i$  не входит в какую-нибудь ТДНФ функции  $f$ . В этом случае значение этой ТДНФ на  $\tilde{\alpha}$  равно нулю, в то время как  $f(\tilde{\alpha})=1$ , т.е. ТДНФ не реализует функцию  $f$ . Получаем противоречие. Следовательно, предположение, что ядровая импликанта не входит в ТДНФ неверное. Теорема доказана.  $\square$

**Определение 18.5.4.** Простая импликанта  $K$  называется *несущественной*, если она обращается в единицу только на тех наборах, где ядро равно единице.

**Теорема 18.5.3.** Тупиковая ДНФ функции  $f$  не содержит несущественных импликант.

**Доказательство.** Докажем от противного. Любую ТДНФ можно записать в виде

$$D^T = Y \vee K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_S,$$

где  $Y$  - ядро функции  $f$ ,  $K_i$  ( $i = \overline{1, S}$ ) – некоторые неядровые простые импликанты. Предположим, что среди неядровых простых импликант имеется несущественная, например,  $K_1$ .

Покажем, что  $Y \vee K_1 = Y$ . Пусть  $\tilde{\alpha}$  - произвольный набор переменных.

Если  $K_1(\tilde{\alpha})=0$ , то равенство выполняется, так как  $Y(\tilde{\alpha}) \vee K_1(\tilde{\alpha}) = Y(\tilde{\alpha}) \vee 0 = Y(\tilde{\alpha})$ .

Если  $K_1(\tilde{\alpha})=1$ , то по определению несущественной импликанты имеем  $Y(\tilde{\alpha})=1$ . Равенство выполняется, так как  $Y(\tilde{\alpha}) \vee K_1(\tilde{\alpha}) = 1 \vee 1 = 1 = Y(\tilde{\alpha})$ .



Применяем равенство  $Y \vee K_1 = Y$  к выражению для тупиковой ДНФ:  $D^T = Y \vee K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_S = Y \vee K_2 \vee \dots \vee K_S$ . Получили, что из тупиковой ДНФ можно удалить импликанту  $K_1$ , а это противоречит определению ТДНФ. Следовательно, наше предположение, что ТДНФ функции  $f$  содержит несущественную импликанту неверное. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, при построении тупиковых ДНФ несущественные импликанты можно удалять из сокращённой ДНФ, без потери равносильности полученной ДНФ исходной функции.

*Алгоритм построения ТДНФ и МДНФ из сокращённой ДНФ:*

1. Выписываем все простые импликанты из сокращённой ДНФ функции  $f$ . Присвоим каждой простой импликанте некоторое имя, т.е. обозначим их, например, как  $K_1, K_2, \dots, K_m$ .

2. Для получения минимальной ДНФ необходимо убрать из сокращённой ДНФ все несущественные импликанты. Это делается с помощью специальной импликантной матрицы Квайна, которая строится по следующему правилу:

- каждому столбцу ставим в соответствие простую импликанту  $K_j$ ;

- каждой строке ставим в соответствие двоичный набор  $\tilde{\alpha}_i$ , на котором  $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$ .

На пересечении строки и столбца ставим значение простой импликанты  $K_j(\tilde{\alpha}_i)$ .

Формируя из импликант функции  $f$ , соответствующих столбцам матрицы Квайна, некоторую тупиковую ДНФ, надо беспокоиться о том, чтобы для каждой строки матрицы Квайна в ТДНФ нашлась импликанта, принимающий значение 1 на наборе, соответствующем этой строке.

3. Ищем ядровые импликанты (все столбцы, в которых содержится 1, являющаяся единственной в некоторой строке), по которым выписываем ядро  $Y(\tilde{x})$  функции  $f(\tilde{x})$ .

4. Строим сокращённую матрицу Квайна:

- вычёркиваем из матрицы Квайна столбцы, соответствующие ядровым импликантам, а также строки, соответствующие двоичным наборам  $\tilde{\alpha}_i$ , на которых  $f(\tilde{\alpha}_i)=1$  и  $Y(\tilde{\alpha}_i)=1$ ;

- среди оставшихся столбцов матрицы Квайна ищем столбцы соответствующие несущественным импликантам (столбцы, у которых все единицы оказались вычеркнутыми на предыдущем этапе) и вычёркиваем их.

Получаем сокращённую матрицу Квайна состоящую из строк соответствующих двоичным наборам  $\tilde{\alpha}_i$ , для которых  $f(\tilde{\alpha}_i)=1$  и  $Y(\tilde{\alpha}_i)=0$ , и столбцов не содержащих ядровых и несущественных импликант.

**5.** Составляем вспомогательную функцию Петрика, которая является конъюнктивным представлением сокращённой матрицы Квайна:

- для каждой  $i$ -ой строки сокращённой матрицы Квайна строим элементарную дизъюнкцию из имён простых импликант, обозначающих столбцы матрицы, на пересечении с которыми в  $i$ -ой строке находятся единицы;

- из построенных для всех строк матрицы дизъюнкций составляем КНФ, которая называется вспомогательной функцией Петрика.

**6.** Преобразуем функцию Петрика в ДНФ. Для этого в полученной КНФ в соответствии с законами дистрибутивности раскрываем скобки, производим всевозможные элементарные поглощения и устраняем все повторения. Получим ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция соответствует некоторой тупиковой ДНФ и, наоборот, каждой тупиковой ДНФ может быть сопоставлена одна из этих конъюнкций.

Обоснованием данного факта служит то, что функция Петрика принимает значение 1 тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция равна 1. В свою очередь, элементарная дизъюнкция равна 1, когда хотя бы одна из её переменных равна 1. Переменными в ДНФ, полученной из функции Петрика, являются имена простых импликант. Поэтому каждая конъюнкция этой ДНФ описывает некоторое множество простых импликант, в

котором для любого двоичного набора  $\tilde{\alpha}_i$  такого, что  $f(\tilde{\alpha}_i)=1$  и  $Y(\tilde{\alpha}_i)=0$ , найдётся хотя бы одна импликанта, равная на этом наборе единице. Добавив к полученному множеству ядровые импликанты, получим множество простых импликант, в котором для любого двоичного набора  $\tilde{\alpha}_i$  такого, что для  $f(\tilde{\alpha}_i)=1$ , найдётся импликанта принимающая единичное значение. Этот факт гарантирует, что тупиковая ДНФ, составленная из импликант данного множества, будет эквивалентна исходной СДНФ функции  $f$ .

**7.** По конъюнкциям ДНФ, полученной из функции Петрика, выписываем все тупиковые ДНФ функции  $f$ . Для этого:

- по именам импликант, входящих конъюнкции, выписываем соответствующие множества простых импликант;

- к выписанным множествам импликант добавляем ядровые импликанты;

- по полученным множествам простых импликант формируем тупиковые ДНФ.

**8.** Среди выписанных тупиковых ДНФ выбираем минимальную по сложности ДНФ.

Применяя данный алгоритм, найдём все минимальные ДНФ для функции из примера 18.3.1.

Так как для данной функции сокращённая ДНФ имеет вид  $D_{\text{сокр}} = \overline{x}u\overline{w} \vee \overline{y}z \vee \overline{z}w \vee \overline{u}w \vee xz$ , то матрица Квайна (рис. 18.5.1) в первоначальном виде содержит 10 строк (по числу единичных наборов функции) и 5 столбцов (по числу простых импликант). На пересечении строки и столбца будем ставить единичные значения простых импликант, а нулевые значения вписывать не будем, им будут соответствовать пустые клетки таблицы (рис.18.5.1).

Ищем ядровые импликанты и упрощаем матрицу Квайна.

Строка, соответствующая набору (0011), содержит только одну единицу в четвёртом столбце. Следовательно, импликанта  $K_4$  – ядровая. Вычёркиваем из матрицы четвёртый столбец, а также строки, соответствующие наборам (0001), (0011), (1001),

(1011), на которых эта ядровая импликанта принимает единичные значения.

Строка, соответствующая набору (0110), содержит только одну единицу в первом столбце. Следовательно, импликанта  $K_1$  – ядровая. Вычёркиваем из матрицы первый столбец и строки, соответствующие наборам (0100), (0110), на которых эта импликанта принимает единичные значения.

Строка, соответствующая набору (1101), содержит только одну единицу в пятом столбце. Следовательно, импликанта  $K_5$  – ядровая. Вычёркиваем из матрицы пятый столбец и строки, соответствующие наборам (1000), (1001), (1100), (1101), на которых эта импликанта принимает единичные значения.

	$\overline{K_1}$	$\overline{K_2}$	$\overline{K_3}$	$\overline{K_4}$	$\overline{K_5}$
	$\overline{xyw}$	$\overline{yz}$	$\overline{zw}$	$\overline{yw}$	$\overline{xz}$
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

18.5.1. Первоначальный вид матрицы Квайна.

В результате получаем, что ядро состоит из простых импликант  $K_1 = \overline{xyw}$ ,  $K_4 = \overline{yw}$ ,  $K_5 = \overline{xz}$ , а упрощённая матрица Квайна имеет вид, показанный на рис.18.5.2.

По упрощённой матрице Квайна выписываем вспомогательную функцию Петрика:  $K(f) = K_2 \vee K_3$ .

В данном случае вспомогательная КНФ и вспомогательная ДНФ совпадают.

	$K_2$	$K_3$
	$\overline{yz}$	$\overline{zw}$
0000	1	1

### 18.5.2. Упрощённая матрица Квайна.

По дизъюнктивным слагаемым вспомогательной ДНФ составляем все тупиковые ДНФ функции  $f$ . Для этого:

- по именам импликант, входящих конъюнкции, выписываем соответствующие множества простых импликант:  $\{\overline{yz}\}, \{\overline{zw}\}$ ;

- к выписанным множествам импликант добавляем ядровые импликанты:  $\{\overline{yz}, \overline{xu\overline{w}}, \overline{yw}, \overline{xz}\}, \{\overline{zw}, \overline{xu\overline{w}}, \overline{yw}, \overline{xz}\}$ ;

- по полученным множествам простых импликант формируем тупиковые ДНФ:

$$D_1^f = \overline{yz} \vee \overline{xu\overline{w}} \vee \overline{yw} \vee \overline{xz}, \quad D_2^f = \overline{zw} \vee \overline{xu\overline{w}} \vee \overline{yw} \vee \overline{xz}.$$

Так как сложности полученных ТДНФ равны  $r(D_1^f) = r(D_2^f) = 9$ , то каждая из этих ДНФ является минимальной.

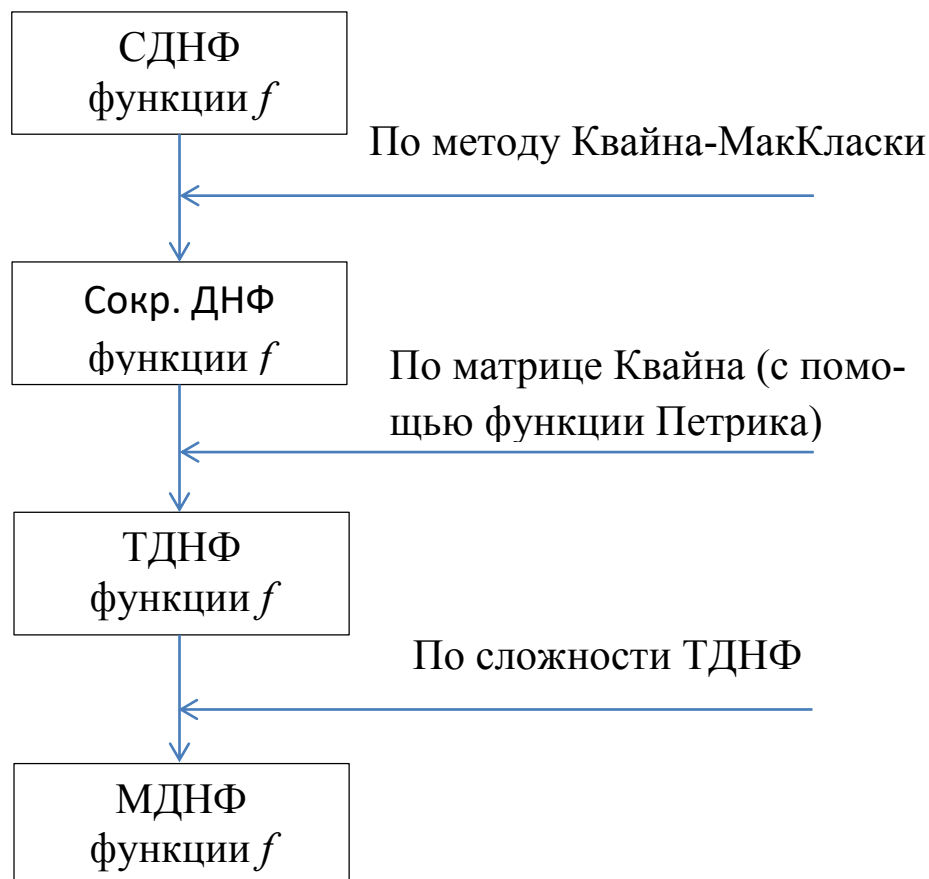
Таким образом, получили две минимальные ДНФ:

$$D_{\min 1}^f = \overline{xu\overline{w}} \vee \overline{yz} \vee \overline{yw} \vee \overline{xz};$$

$$D_{\min 2}^f = \overline{xu\overline{w}} \vee \overline{zw} \vee \overline{yw} \vee \overline{xz}.$$

## 18.6. Алгоритм минимизации булевой функции в классе нормальных форм

Задачу минимизации булевой функции  $f$  в классе ДНФ можно рассматривать как переход от СДНФ к МДНФ, который включает ряд этапов рис.18.6.1.



### 18.6.1. Этапы минимизации в классе ДНФ.

Запишем алгоритм минимизации булевой функции в классе ДНФ:

1. Строим СДНФ функции  $f$ .
2. По методу Квайна-МакКласки находим сокращённую ДНФ функции  $f$ .
3. С помощью матрицы Квайна и функции Петрика находим все ТДНФ функции  $f$ .
4. Среди построенных ТДНФ выбираем все минимальные ДНФ функции  $f$ .

Для получения минимальных форм в классе КНФ используют те же методы, только для функции  $\bar{f}$ .

Чтобы построить все минимальные КНФ (МКНФ) функции  $f$ , следует построить все МДНФ функции  $\bar{f}$  и взять от каждой из них отрицание. Полученные КНФ для функции  $f$  будут минимальными. Действительно, предположим, что для функции  $f$  су-

существует КНФ с меньшим числом символов переменных, чем в МДНФ функции  $\bar{f}$ . Тогда отрицание от этой КНФ даст ДНФ функции  $\bar{f}$  с меньшим числом символов переменных, чем в любой из минимальных ДНФ функции  $\bar{f}$ . Получаем противоречие с минимальностью найденных ДНФ для функции  $\bar{f}$ , следовательно, наше предположение неверное. Поэтому КНФ для функции  $f$ , полученные из МДНФ функции  $\bar{f}$ , будут минимальными. Этапы минимизации в классе КНФ показаны на рис.18.6.2.



18.6.2. Этапы минимизации в классе КНФ.

Запишем алгоритм минимизации булевых функций в классе КНФ:

1. Строим СДНФ функции  $\bar{f}$ .
2. По методу Квайна-МакКласки находим сокращённую ДНФ функции  $\bar{f}$ .
3. С помощью матрицы Квайна и функции Петрика находим все ТДНФ функции  $\bar{f}$ .
4. Среди построенных ТДНФ выбираем все минимальные ДНФ функции  $\bar{f}$ .
5. Взяв от каждой минимальной ДНФ функции  $\bar{f}$  отрицание, получим все минимальные КНФ функции  $f$ .

Обычно для булевой функции  $f$  находят обе минимальные формы – МДНФ и МКНФ. Для реализации выбирают ту из них, которая содержит минимальное число символов переменных и приводит к наиболее простой логической схеме.

*Алгоритм минимизации функции в классе нормальных форм:*

1. Строим все МДНФ функции  $f$ .
2. Строим все МКНФ функции  $f$ .
3. Из построенных минимальных форм выбираем формы, содержащие наименьшее число символов переменных.

**Пример 18.6.1.** В классе нормальных форм минимизировать функцию  $f = (1101\ 1011)$ .

**Решение.**

**1. Находим все МДНФ функции  $f$ .**

СДНФ функции  $f : f(x, y, z) = \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$ .

Таблица 18.6.1.

1. 000 +	1. 00- 1-2
2. 001 +	2. -00 1-3
3. 100 +	3. 0-1 2-4
4. 011 +	4. 1-0 3-5
5. 110 +	5. -11 4-6
6. 111 +	6. 11- 5-6
<b>I столбец</b>	<b>II столбец</b>



По методу Квайна-МакКласки находим сокращённую ДНФ функции  $f$ .

Для нахождения простых импликант выписываем элементарные конъюнкции в формализованном виде и проводим операцию склеивания (табл. 18.6.1.).

Строим таблицу соответствий между полученными троичными векторами степеней и простыми импликантами (табл. 18.6.2):

Таблица 18.6.2.

	Троичные вектора степеней	Простые импликанты
1.	00-	$\overline{\overline{xy}}$
2.	-00	$\overline{\overline{yz}}$
3.	0-1	$\overline{\overline{xz}}$
4.	1-0	$\overline{\overline{xz}}$
5.	-11	$\overline{yz}$
6.	11-	$xy$

Сокращённая ДНФ данной булевой функции имеет вид:

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{xy}} \vee \overline{\overline{yz}} \vee \overline{\overline{xz}} \vee \overline{\overline{xz}} \vee \overline{yz} \vee xy.$$

Строим матрицу Квайна (рис. 18.6.3.).

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>
	$\overline{\overline{xy}}$	$\overline{\overline{yz}}$	$\overline{\overline{xz}}$	$\overline{\overline{xz}}$	$\overline{yz}$	$xy$
000	1	1				
001	1		1			
011			1		1	
100		1		1		
110				1		1
111					1	1

18.6.3. Матрица Квайна для функции  $f$

Строк, содержащих только одну единицу, нет, поэтому нет ядровых импликант.

Составляем вспомогательную функцию Петрика:

$$\begin{aligned}
 K(f) &= (K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_3)(K_3 \vee K_5)(K_2 \vee K_4)(K_4 \vee K_6)(K_5 \vee K_6) = \\
 &= (K_1 \vee K_2K_3)(K_4 \vee K_2K_6)(K_5 \vee K_3K_6) = \\
 &= (K_1K_4 \vee K_1K_2K_6 \vee K_2K_3K_4 \vee K_2K_3K_6)(K_5 \vee K_3K_6) = \\
 &= K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_5K_6 \vee K_2K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee \\
 &\vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_6 = \\
 &= K_1K_4K_5 \vee K_2K_3K_6 \vee K_1K_2K_5K_6 \vee K_2K_3K_4K_5 \vee K_1K_3K_4K_6.
 \end{aligned}$$

По конъюнкциям вспомогательной ДНФ выписываем тупиковые ДНФ функции  $f$ :

$$\begin{aligned}
 D_1^f &= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z; & D_2^f &= \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}x; \\
 D_3^f &= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y; & D_4^f &= \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z; \\
 D_5^f &= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}x.
 \end{aligned}$$

Минимальные ДНФ функции  $f$ :

$$D_{\min 1}^f = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z; \quad D_{\min 2}^f = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}x.$$

## 2. Находим все МКНФ функции $f$ .

Повторяем указанные выше этапы для функции  $\bar{f}$ .

Выписываем СДНФ функции  $\bar{f}$ :  $\bar{f}(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$ .

Находим сокращённую ДНФ функции  $f$ .

Для нахождения простых импликант выписываем элементарные конъюнкции в формализованном виде (табл. 18.6.3.).

Таблица 18.6.3.

1.	010
2.	101
<b>I столбец</b>	

Операция склеивания для данных троичных векторов степеней не определена, следовательно, сокращённая ДНФ данной булевой функции совпадает с СДНФ.

Строим матрицу Квайна (рис. 18.6.4.).

	$P_1$	$P_2$
	$\overline{xy}\overline{z}$	$x\overline{y}z$
<b>010</b>	<b>1</b>	
<b>101</b>		<b>1</b>

18.6.4. Матрица Квайна для функции  $\overline{f}$ .

Импlicants  $P_1$  и  $P_2$  - ядровые, поэтому СДНФ функции  $\overline{f}$  является для неё тупиковой и минимальной, т.е.

$$D_{\min}^{\overline{f}} = \overline{xy}\overline{z} \vee x\overline{y}z.$$

Найдём минимальную КНФ функции  $f$  :

$$K_{\min}^f = \overline{D_{\min}^{\overline{f}}} = \overline{\overline{xy}\overline{z} \vee x\overline{y}z} = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

**3. Из построенных минимальных форм выбираем формы, содержащие наименьшее число символов переменных.**

Построенные МДНФ и МКНФ имеют одно и то же число символов переменных равное шести, поэтому все они составляют минимальные формы для функции  $f$  :

$$D_{\min 1}^f = \overline{\overline{x}}\overline{\overline{y}} \vee \overline{xz} \vee yz;$$

$$D_{\min 2}^f = \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee xy;$$

$$K_{\min}^f = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

## 18.7. Карты Карно

Самым удобным методом для быстрого решения задачи минимизации булевой функции от достаточно большого числа аргументов, является метод карт Карно, изобретённый в 1950-ых годах для разработки логических схем. После его применения получается минимальная форма функции в базисе (И, ИЛИ, НЕ).

Прежде, чем приступить к рассмотрению карт Карно, покажем на простых примерах, как осуществляется соседнее кодирование для произвольного числа переменных.

Для одной переменной  $x_1$  существует только соседнее кодирование, так как она кодируется нулём и единицей. Покажем соседнее кодирование для трёх переменных. Предлагается следующая операция:

1. Напишем в один столбец коды переменной  $x_1$ . Между нулём и единицей в этом столбце проведём ось, которую назовём *осью симметрии 1-го ранга* (рис.18.7.1).

$$\begin{array}{c} x_1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \leftarrow \text{ось 1-го ранга}$$

Рис. 18.7.1. Кодирование переменной  $x_1$ .

2. Под столбцом для переменной  $x_1$  проведём ось симметрии, которую назовём *осью симметрии 2-го ранга*. Продолжим столбец кодов для переменной  $x_1$  симметрично относительно этой оси (симметрично относительно оси симметрии 2-го ранга разместятся и оси симметрии 1-го ранга) (рис.18.7.2).

$$\begin{array}{c} x_1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ось 1-го ранга} \\ \leftarrow \text{ось 1-го ранга} \end{array}$$

*ось 2-го ранга*  $\rightarrow$

Рис. 18.7.2. Построение оси 2-го ранга.

3. Дополним одноразрядный код до двухразрядного, вписав во втором разряде для переменной  $x_2$  нули выше оси 2-го ранга и единицы ниже этой оси (рис. 18.7.3).

$x_2$	$x_1$
0	0
0	1
1	1
1	0

Рис. 18.7.3. Кодирование переменной  $x_2$ .

Таким образом, мы осуществили соседнее кодирование для двух переменных.

4. Чтобы построить соседние коды для трёх переменных, проведём под столбцами двухразрядных кодов *ось симметрии 3-го ранга* и продолжим столбцы кодов для переменных  $x_1$  и  $x_2$  симметрично относительно этой оси, т.е. осуществим симметричное отображение относительно этой оси, т.е. осуществим симметричное отображение относительно оси 3-го ранга (симметрично относительно оси симметрии 3-го ранга разместятся и оси симметрии 1-го и 2-го рангов) (рис.18.7.4).

	$x_2$	$x_1$	
	0	0	
	0	1	↙ ось 2-го ранга
	1	1	
↘ ось 3-го ранга	1	0	
	1	0	
	1	1	
	0	1	↙ ось 2-го ранга
	0	0	

Рис. 18.7.4. Построение оси 3-го ранга.

5. Дополним двухразрядный код до трёхразрядного, вписав в третьем разряде для переменной  $x_3$  нули выше оси 3-го ранга и единицы ниже этой оси. Получим соседнее кодирование для трёх переменных (рис.18.7.5).

$x_3$	$x_2$	$x_1$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Рис. 18.7.5. Кодирование переменной  $x_3$ .

Следовательно, для того, чтобы осуществить соседнее кодирование для  $(n+1)$  переменной, если известно соседнее кодирование для  $n$  переменных, необходимо выполнить следующий алгоритм:

1) под столбцом известного  $n$ -разрядного соседнего кодирования провести ось симметрии  $(n+1)$ -го ранга;

2) осуществить симметричное отображение относительно оси симметрии  $(n+1)$ -го ранга всех  $n$ -разрядных кодов и осей симметрии всех рангов до ранга  $n$  включительно;

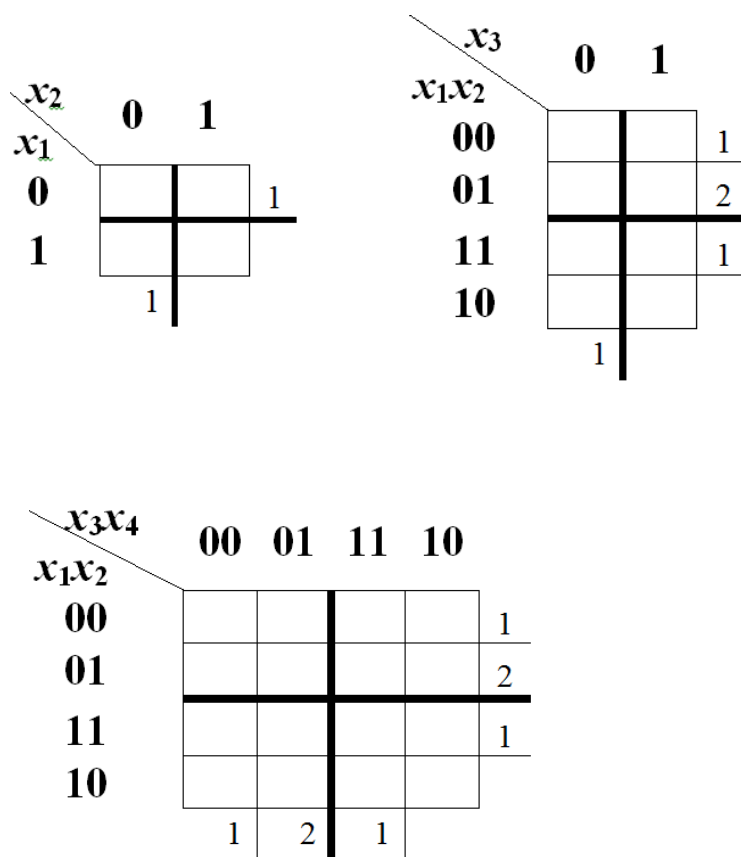
3) дополнить  $n$ -разрядные коды слева одним разрядом, в котором записать 0 для всех кодов выше оси симметрии  $(n+1)$ -го ранга и 1 для кодов, расположенных ниже оси симметрии  $(n+1)$ -го ранга.

*Карта Карно* – это наглядная схема задания булевой функции, предназначенная для обнаружения целых групп соседних элементарных конъюнкций, к которым можно применить операцию склеивания.

Для функции  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  карта Карно представляет собой таблицу, состоящую из  $2^n$  клеток. Каждой клетке таблицы соответствует определённый набор переменных, при этом клетки закодированы так, чтобы соседним клеткам соответствовали соседние наборы переменных.

Для соседнего кодирования карт Карно по вышеизложенному алгоритму производится разбиение множество  $n$  переменных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  на две группы в порядке возрастания их номеров  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  и  $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$ . Для каждой группы проводится соседнее кодирование. Кодировке первой группы переменных  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  ставятся в соответствие строки таблицы, кодировке второй группы переменных  $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$  – столбцы. В построенной таблице границы между строками и столбцами таблицы будут играть роль осей симметрии соответствующих соседних кодировок групп переменных.

На рисунке 18.7.6. представлены Карты Карно для 2, 3, 4 переменных. Оси симметрии, необходимые для соседнего кодирования групп переменных, отмечены рангами.



18.7.6. Карты Карно для 2, 3, 4, переменных.

В любой карте Карно соседними клетками, к которым можно применить правило склеивания, являются не только смежные клетки, но и клетки находящиеся на противоположных концах любой строки и любого столбца.

$x_3x_4$	00	01	11	10
$x_1x_2$ 00	p			p
01				
11				
10	p			p

18.7.7. Карта Карно для 4-х переменных с соседними клетками, обозначенными буквой **p**.

Например, на рисунке 18.7.7. в поле карты для 4-х переменных соседними будут клетки обозначенные буквой **p**. Им соответствуют наборы: (0000), (0010), (1000), (1010).

Под *прямоугольником Карно* будем понимать некоторую выделенную группу  $2^k$  соседних клеток, закодированных соседними наборами, зачастую образующих разрозненную фигуру покрытия карты.

$x_4x_5$	00	01	11	10
$x_1x_2x_3$ 000	t			t
001				
011				
010	t			t
110	t			t
111				
101				
100	t			t

18.7.8. Карта Карно для 5-ти переменных с прямоугольником Карно **t**.



Например, на рисунке 18.7.8. в поле карты для 5-ти переменных изображён прямоугольник Карно  $t$ , состоящий из  $2^3 = 8$  элементарных квадратов Карно и описываемый соседними наборами: (00000), (00010), (01100), (01110), (10000), (10010), (11100), (11110).

Возникает вопрос: как определить, будет ли выделенная на карте фигура прямоугольником Карно? Определение достоверности прямоугольника Карно основано на принципе симметрии и осуществляется с помощью приводимого ниже алгоритма.

*Алгоритм проверки достоверности прямоугольника Карно (принцип симметрии):*

1. Если предполагаемый прямоугольник Карно (ППК) охватывает одну ось симметрии, либо не охватывает ни одной, то перейти к п.4.

2. Если ППК располагается по обе стороны от нескольких осей симметрии, то он должен быть симметричен относительно той из этих осей, которая имеет максимальный ранг, иначе данная фигура не является прямоугольником Карно.

3. Разбить исходный ППК пополам, относительно оси максимального ранга. Считать любую его половину новым ППК. Перейти к п.1.

4. Конец.

Применяя алгоритм, проверим, будет ли фигура  $t$  на рисунке 18.7.8 прямоугольником Карно. По алгоритму:

- фигура  $t$  симметрична относительно горизонтальной оси симметрии 3-го ранга;

- верхняя половина фигуры  $t$  симметрична относительно вертикальной оси симметрии 2-го ранга;

- верхняя левая четверть фигуры  $t$  симметрична относительно горизонтальной оси симметрии 2-го ранга

- половина верхней левой четверти фигуры  $t$  не охватывает ни одной оси симметрии.

Следовательно, фигура  $t$  будет прямоугольником Карно.

На рисунке 18.7.9 даны примеры фигур, не являющихся прямоугольниками Карно. Фигуры  $k$ ,  $m$  и  $n$  не являются прямоугольниками Карно в силу нарушения принципа симметрии. Фигура  $n$  не симметрична относительно вертикальной оси симметрии.

рии 2-го ранга, фигура **m** не симметрична относительно горизонтальной оси симметрии 3-го ранга. Фигура **k** симметрична относительно горизонтальной оси симметрии 3-го ранга, но её половина не симметрична относительно горизонтальной оси 2-го ранга.

$x_4x_5$	00	01	11	10
$x_1x_2x_3$				
000	<b>k</b>	<b>n</b>	<b>n</b>	<b>n</b>
001	<b>k</b>	<b>n</b>	<b>n</b>	<b>n</b>
011				
010	<b>k</b>		<b>m</b>	<b>m</b>
110	<b>k</b>		<b>m</b>	<b>m</b>
111			<b>m</b>	<b>m</b>
101	<b>k</b>		<b>m</b>	<b>m</b>
100	<b>k</b>			

### 18.7.9. Фигуры **k**, **m** и **n**, не являющиеся прямоугольниками Карно.

На карте Карно булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задаётся указанием в каждой клетке значения, которое она принимает на наборе, соответствующем клетке.

Например, на рисунке 18.7.10 в поле карты для 4-х переменных задана функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1011\ 0001\ 1011\ 0001)$ .

$x_3x_4$	00	01	11	10
$x_1x_2$				
00	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
01	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
11	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
10	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

### 18.7.10. Карта Карно для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Записав данную функцию в виде СДНФ и аналитически упростив с помощью операции склеивания, получим:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \\
&\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = \\
&= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_4 = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4.
\end{aligned}$$

Карта Карно позволяет получить этот результат графически значительно быстрее и проще. Для решения этой задачи используем алгоритм графической минимизации.

*Алгоритм графической минимизации логических функций:*

1. Заполнить карту Карно нулями и единицами в соответствии с таблицей истинности булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

2. Покрыть все единичные наборы минимальным количеством прямоугольников Карно, каждый из которых имеет максимальную площадь.

3. Проверить каждую фигуру покрытия на соответствие принципу симметрии. В противном случае изменить контур фигуры покрытия в соответствии с принципом симметрии так, чтобы она превратилась в прямоугольник Карно.

4. Каждому прямоугольнику Карно соответствует одна импликанта, причём, если в границах прямоугольника Карно какая-либо переменная принимает значения как 0, так и 1, то она склеивается.

**Примечание.** Если в карте Карно нулей окажется меньше чем единиц, то удобнее прямоугольниками Карно покрыть все нулевые наборы. В результате мы получим инверсию минимизируемой функции.

Сущность алгоритма достаточно прозрачна. Стремление к минимальному количеству прямоугольников Карно приводит в результате к минимальному количеству слагаемых в булевой функции. Требование получения максимальной площади прямоугольника Карно вызвано стремлением минимизировать длину каждого слагаемого булевой функции.

Найдём с помощью карты Карно минимальную ДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1011\ 0001\ 1011\ 0001)$ . Карта Карно с выде-

ленными прямоугольниками Карно показана на рис. 18.7.11.

	$x_3x_4$	00	01	11	10
$x_1x_2$	00	1	0	1	1
01	0	0	1	0	
11	0	0	1	0	
10	1	0	1	1	

18.7.11. Карта Карно функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , с выделенными прямоугольниками Карно.

Находим импликанты, соответствующие выделенным прямоугольникам.

1. Для синего прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{ccc} 0000 & 0010 & -000 \\ \underline{1000} & \underline{1010} & \underline{-010} \\ -000 & -010 & -0-0 \end{array} \right| \Rightarrow (-0-0) \leftrightarrow \bar{x}_2\bar{x}_4.$$

2. Для красного прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{ccc} 0011 & 1111 & 0-11 \\ \underline{0111} & \underline{1011} & \underline{1-11} \\ 0-11 & 1-11 & --11 \end{array} \right| \Rightarrow (--11) \leftrightarrow x_3x_4.$$

Минимальная ДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  имеет вид:

$$D_{\min}^f = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4.$$

По карте Карно можно получить и минимальную КНФ. Для этого находят МДНФ инверсной функции  $\bar{f}$ , берут от неё отрицание  $\overline{\bar{f}}$  и, применив правила де Моргана, получают МКНФ.

**Пример 18.7.1.** Для функции, заданной векторно

$$f(x, y, z, w) = (1101 \ 1010 \ 1101 \ 1100),$$

найти минимальную ДНФ и минимальную КНФ с помощью карт Карно.

**Решение.** Изобразим таблицу функции  $f(x, y, z, w)$ :

$x$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$y$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
$z$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
$w$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$f(x, y, z, w)$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0

Задача нахождения минимальной ДНФ с помощью карты Карно сводится к задаче покрытия всех единиц карты Карно минимальным количеством прямоугольников наибольших размеров, причём разрешается использовать только прямоугольники, симметричные относительно осей симметрий и площади которых являются натуральными степенями двойки.

	$zw$	00	01	11	10
$xu$					
00		1	1	1	0
01		1	0	0	1
11		1	1	0	0
10		1	1	1	0

Рис. 18.7.12. Карта Карно функции  $f(x, y, z, w)$ , с выделенными прямоугольниками Карно для нахождения МДНФ.

Находим импликанты соответствующие выделенным прямоугольникам (рис.18.7.12).

1. Для синего прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{l} 0000 \quad 1100 \quad 0-00 \\ 0100 \quad ; \quad 1000 \quad ; \quad 1-00 \\ 0-00 \quad 1-00 \quad --00 \end{array} \right| \Rightarrow (- - 00) \leftrightarrow \bar{z}\bar{w}.$$

2. Для фиолетового прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{l} 0001 \quad 1001 \quad 00-1 \\ 0011 \quad ; \quad 1011 \quad ; \quad 10-1 \\ 00-1 \quad 10-1 \quad -0-1 \end{array} \right| \Rightarrow (-0-1) \leftrightarrow \bar{y}w.$$

3. Для зелёного прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{ccc} 1100 & 1101 & 1-00 \\ \underline{1000} & ; & \underline{1001} ; & \underline{1-01} \\ 1-00 & 1-01 & 1-0- \end{array} \right| \Rightarrow (1-0-) \leftrightarrow x\bar{z}.$$

4. Для красного прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{c} 0100 \\ \underline{0110} \\ 01-0 \end{array} \right| \Rightarrow (01-0) \leftrightarrow \bar{x}y\bar{w}.$$

Минимальная ДНФ имеет вид:  $D_{\min}^f = \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{w}$ .

Задача нахождения минимальной КНФ с помощью карты Карно сводится к задаче покрытия всех нулей карты Карно минимальным количеством прямоугольников наибольших размеров.

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	1	0

Рис. 18.7.13. Карта Карно функции  $f(x, y, z, w)$ , с выделенными прямоугольниками Карно для нахождения МКНФ.

Находим импликанты соответствующие выделенным прямоугольникам (рис.18.7.13):

1. Для красного прямоугольника:

$$\left. \begin{array}{c} 0010 \\ \underline{1010} \\ -010 \end{array} \right| \Rightarrow (-010) \leftrightarrow \bar{y}z\bar{w}.$$

2. Для фиолетового прямоугольника:

$$\begin{array}{l|l} 1111 & \\ \hline 1110 & \Rightarrow (111-) \leftrightarrow xyz. \\ 111- & \end{array}$$

3. Для зелёного прямоугольника:

$$\begin{array}{l|l} 0101 & \\ \hline 0111 & \Rightarrow (01-1) \leftrightarrow \bar{x}yw. \\ 111- & \end{array}$$

Минимальная ДНФ функции  $\bar{f}$  имеет вид:

$$D_{\min}^{\bar{f}} = \bar{y}z\bar{w} \vee xyz \vee \bar{x}yw.$$

Чтобы получить минимальную КНФ функции  $f$ , берём отрицание от  $D_{\min}^{\bar{f}}$ :

$$\begin{aligned} K_{\min}^f &= \overline{D_{\min}^{\bar{f}}} = \overline{\bar{y}z\bar{w} \vee xyz \vee \bar{x}yw} = \overline{\bar{y}z\bar{w}} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{\bar{x}yw} = \\ &= (y \vee \bar{z} \vee w) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{w}). \end{aligned}$$

## 19. Задачи анализа и синтеза логических схем

Логическая схема, имеющая  $n$  входов  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и  $m$  выходов  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ , в обобщённом виде представлена на рис. 19.1.

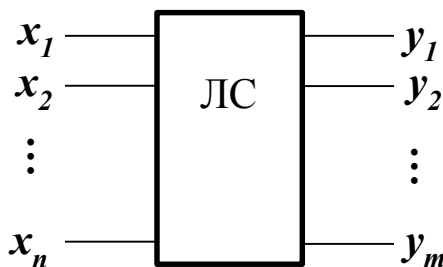


Рис. 19.1. Обобщённый вид ЛС.

Работу логической схемы (рис. 19.1) можно описать:

- *системой*, выражающей зависимость между множеством входных переменных  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и множеством булевых функций  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ :

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_m = y_m(x_1, x_2, \dots, x_n); \end{cases}$$

- *таблицей истинности*, имеющей  $2^n$  строк (по строке для каждого набора входных переменных) и  $(n+m)$  столбцов ( $n$  столбцов для входов и  $m$  столбцов для выходов схемы).

Относительно логических схем обычно решаются две задачи: анализа и синтеза.

### 19.1. Задача анализа логических схем

*Задача анализа ЛС* заключается в выявлении реализуемой булевой функции. При её решении следует придерживаться следующей последовательности действий:

- 1) заданная схема разбивается на яруса, которые нумеруются с конца;
- 2) начиная с последнего яруса, выходы каждого элемента обозначаются проиндексированными функциями в зависимости от яруса, к которому относится элемент;
- 3) записываются выходные функции каждого элемента в виде формул в соответствии с введёнными обозначениями;
- 4) производится подстановка одних выходных функций через другие, используя входные переменные;
- 5) записывается получившаяся булева функция через входные переменные.

**Пример 19.1.1.** По заданной логической схеме (рис. 19.1.2) составить булеву функцию.

**Решение.** Согласно приведённой выше последовательности действий, схема разобьётся на три яруса. Пронумеровав полу-



чившиеся ярусы, введём обозначения для каждой выходной функции. Запишем все функции, начиная с 1-го яруса:

1.  $f_1 = f_{21} \cdot f_{22} \cdot x_4$ ;
2. а)  $f_{21} = f_{31} \vee x_2$ , б)  $f_{22} = x_2 \cdot f_{32}$ ;
3. а)  $f_{31} = \bar{x}_1$ , б)  $f_{32} = x_2 \vee x_3$ .

Теперь запишем все функции, подставляя входные переменные:

а)  $f_{21} = \bar{x}_1 \vee x_2$ , б)  $f_{22} = x_2 \cdot (x_2 \vee x_3)$ .

В итоге, получим выходную функцию:

$$f = f_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot x_2 \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot x_4.$$

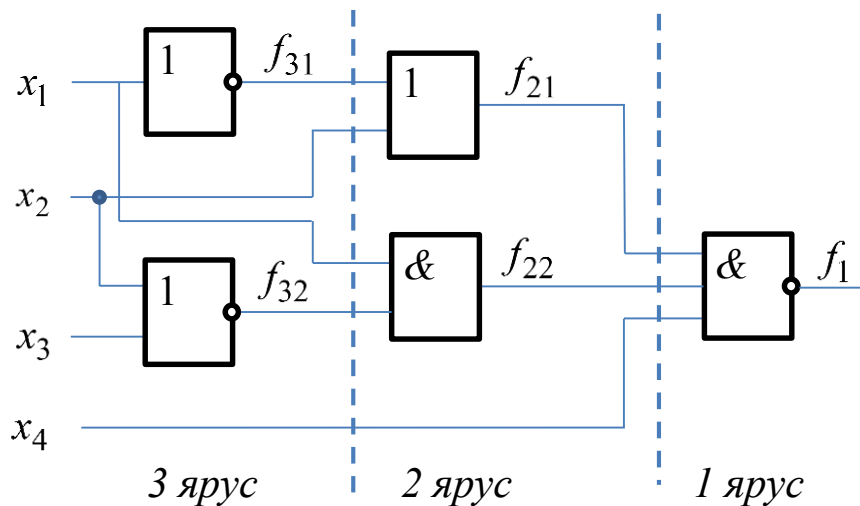


Рис.19.1.2. Логическая схема.

**Пример 19.1.2.** Найти математическое описание логической схемы (рис. 19.1.3).

**Решение.** Логические функции представленной схемы легко находятся по её структуре:

$$\begin{cases} y_1 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = x_1 x_2; \\ y_2 = \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} \vee \overline{x_4}. \end{cases}$$

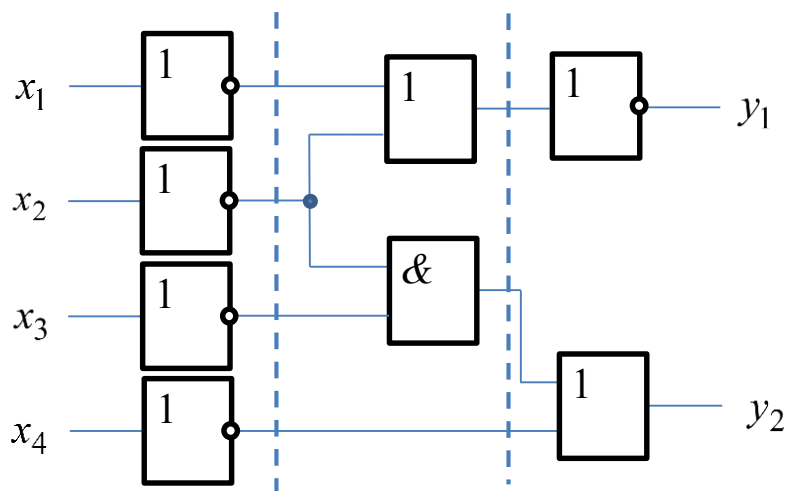


Рис.19.1.3. Логическая схема.

## 19.2. задача синтеза логических схем

*Задача синтеза ЛС* – определить содержимое «чёрного ящика» (рис. 19.2.1), т.е. определить состав логических элементов, входящих в логическую схему, и порядок их соединения между собой.

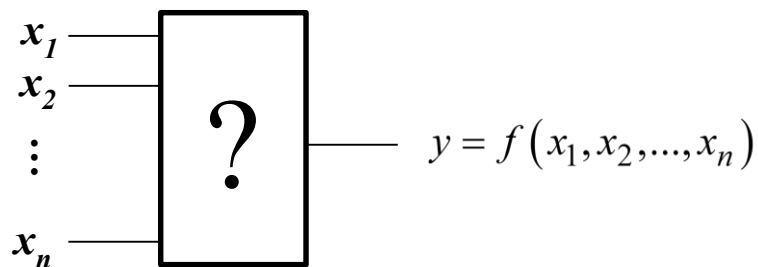


Рис. 19.2.1. «Чёрный ящик» с заданной функцией выхода.

При построении схем в реальной системе элементов необходимо учитывать ряд конструктивных ограничений, основными из которых являются:

1. *Коэффициент объединения по входу*, который представляет собой ограничение на число входов в элемент. Может принимать значения 2,3,4,8,16.

2. Коэффициент разветвления по выходу, определяющий максимальное число логических элементов, которые можно подключить к выходу элемента в условиях его нормального функционирования. Этот коэффициент определяет нагрузочную способность. Варьируется от 10 до 30.

Различают ЛС с одним и многими выходами. Разберём этапы синтеза с учётом того, что ЛС может быть многовыходной:

а) составление математического описания ЛС, адекватно отображающего назначение схемы (либо в виде таблиц истинности, либо в аналитической форме в виде системы);

б) анализ выходных булевых функций, их предварительная совместная минимизация в заданном базисе;

в) построение логической схемы, реализующей полученные функции, в заданном базисе, с учётом коэффициента объединения по входам и коэффициента разветвления по выходу.

Качество синтезируемой схемы оценивается двумя основными показателями: затратами оборудования и быстродействием. Затраты оборудования определяются ценой схемы по Квайну, а быстродействие схемы задержкой распространения сигналов от входов схемы до её выхода.

Отметим, что при синтезе логических схем необходимо учитывать, в каком виде представляются входные сигналы схемы: в прямом и инверсном или только в прямом. В первом случае синтезируется схема с парафазными входами, во втором – с однофазными входами. В схемах с однофазными входами отрицания входных переменных реализуются отдельными логическими элементами – инверторами.

Например, для функции  $f$ , заданной МДНФ  $f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6$ , схема с парафазными входами показана на рис. 19.2.2, а с однофазными входами на рис. 19.2.3. В этих схемах для соединения элементов между собой используются линии, изображающие «жгуты».

«Жгут» состоит из двух и более изолированных проводников и на чертеже изображается одной линией. Чтобы иметь сведения о присоединяемых к «жгуту» проводниках, каждому проводнику

присваивают порядковый номер. Этот номер указывается при входе проводника в «жгут» и выходе его из «жгута».

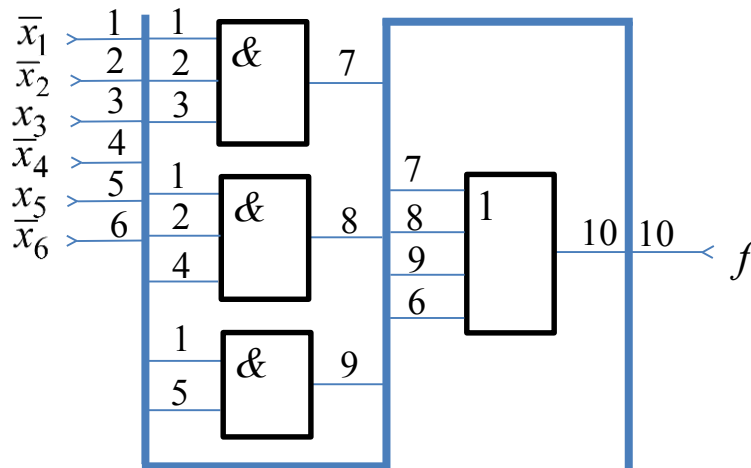


Рис.19.2.2. ЛС с парафазными входами, реализующая функцию  $f$ .

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.2. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов, необходимых для построения логической схемы, показано в таблице 19.2.1;

Таблица 19.2.1.

Логические элементы	на 2 входа	на 3 входа	на 4 входа	Всего элементов
<b>И</b>	1	2	—	<b>4</b>
<b>ИЛИ</b>	—	—	1	

- конструктивная сложность схемы определяется по Квайну - число входов логических элементов -  $S_Q=12$ ;

- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=2\tau$ .

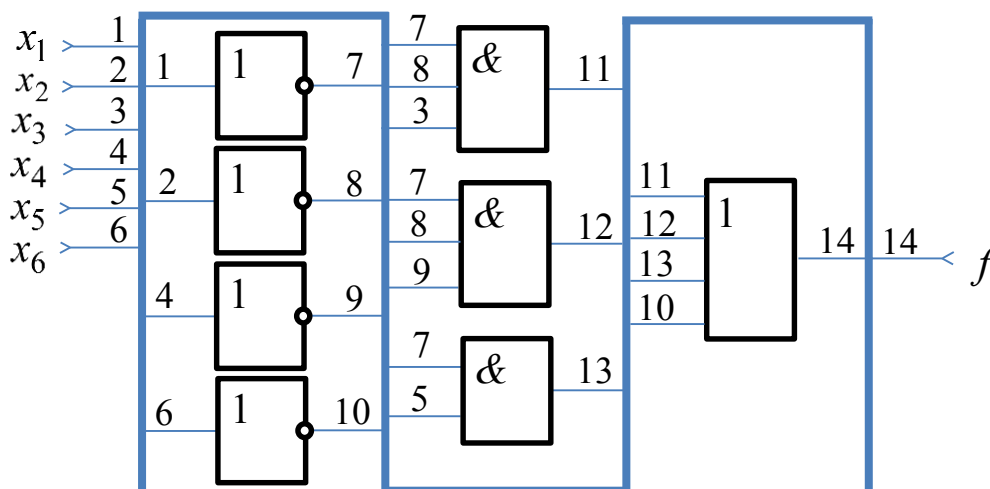


Рис.19.2.3. ЛС с однофазными входами, реализующая функцию  $f$ .

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.3. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов, необходимых для построения логической схемы, показано в таблице 19.2.2;

Таблица 19.2.2.

Логические элементы	на 1 вход	на 2 входа	на 3 входа	на 4 входа	Всего элементов
<b>И</b>	—	1	2	—	<b>8</b>
<b>ИЛИ</b>	—	—	—	1	
<b>НЕ</b>	4	—	—	—	

- конструктивная сложность схемы определяется по Квайну - число входов логических элементов -  $S_Q=16$ ;

- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=3\tau$ .

При построении схемы с однофазными входами целесообразно выбирать такую минимальную форму (если она не един-

ственная) которая содержит наименьшее число инверсий над разными элементами.

Если число входов у элементов ограничено, то перед синтезом логической схемы необходимо провести факторизацию алгебраической формы булевой функции.

### 19.2.1. Факторизация

Факторизация алгебраической формы булевой функции сводится к вынесению за скобки общих частей многоместных конъюнкций и дизъюнкций, ранги которых больше, чем заданный коэффициент объединения по входу, так как одним элементом эти выражения реализованы быть не могут, а требуют разбиения и реализации по частям.

Например, при коэффициенте объединения по входу равном двум, МДНФ функции  $f = \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3$  преобразуется к виду  $f = (\bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2) \cdot x_4 \vee x_2\bar{x}_3$ , для реализации которого используются только двухвходовые вентили.

Рассмотрим схемы, построенные по МДНФ и факторной форме функции  $f$  (рис.19.2.1.1 и рис. 19.2.1.2).

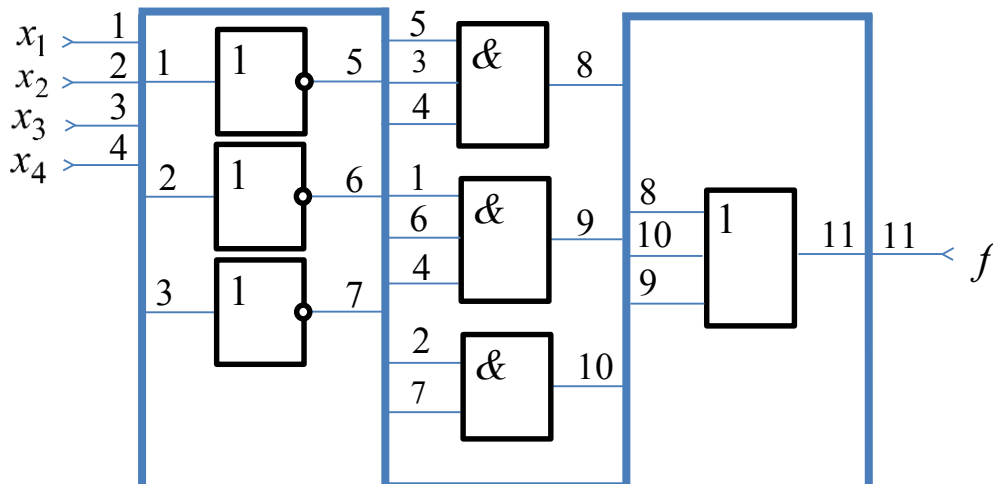


Рис.19.2.1.1. ЛС с однофазными входами, реализующая МДНФ функции  $f$ .

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.1.1. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов, необходимых для построения логической схемы, показано в таблице 19.2.1.1;

Таблица 19.2.1.1.

Логические элементы	на 1 вход	на 2 входа	на 3 входа	Всего элементов
<b>И</b>	—	1	2	
<b>ИЛИ</b>	—	—	1	
<b>НЕ</b>	3	—	—	<b>7</b>

- конструктивная сложность схемы -  $S_Q=14$ ;

- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=3\tau$ .

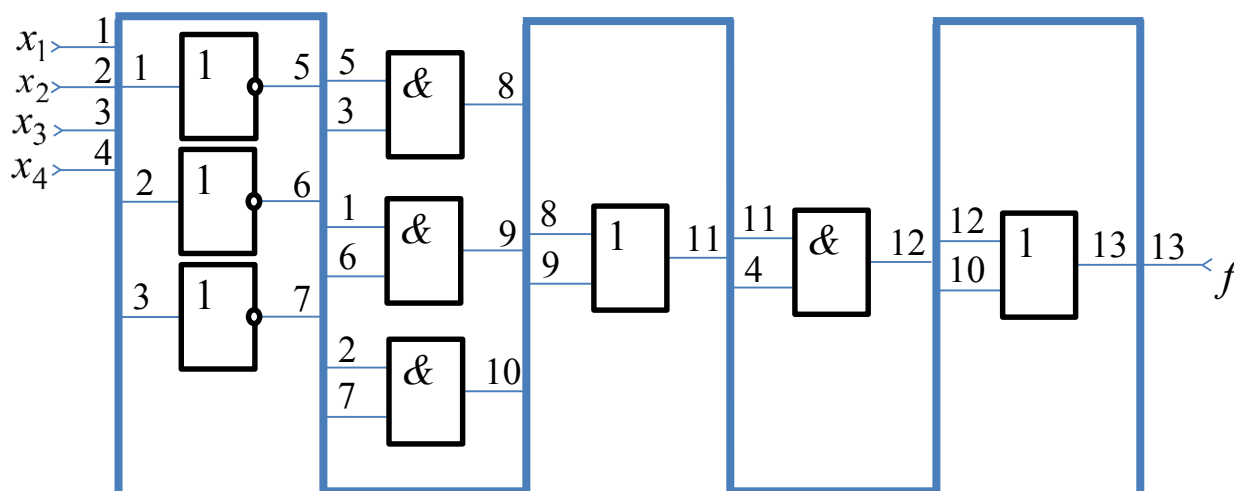


Рис.19.2.1.2. ЛС с однофазными входами, реализующая факторную форму функции  $f$ .

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.1.2. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов, необходимых для построения логической схемы, показано в таблице 19.2.1.2;

Таблица 19.2.1.2.

Логические элементы	на 1 вход	на 2 входа	Всего элементов
<b>И</b>	—	4	<b>9</b>
<b>ИЛИ</b>	—	2	
<b>НЕ</b>	3	—	

- конструктивная сложность схемы -  $S_Q=15$ ;

- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=5\tau$ .

Схема на рис. 19.2.1.1 удовлетворяет ограничению на число входов и является более предпочтительной по сравнению со схемой 19.2.1.2, но по критериям цены и минимальности задержки - лучше схема 19.2.1.1.

Факторизация булевой функции иногда приводит к уменьшению цены синтезируемой схемы. Покажем это на примере факторного преобразования МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_5), S_Q=11, T=2\tau;$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \cdot x_4)(x_1 \vee x_5), S_Q=9, T=3\tau;$$

$$f = x_1 \vee (x_2 \vee x_3 \cdot x_4) \cdot x_5, S_Q=8, T=4\tau.$$

### 19.2.2. Синтез ЛС с несколькими выходами

Задача синтеза ЛС с  $n$  входами и  $m$  выходами отличается от задачи синтеза ЛС с одним выходом тем, что на каждом из выходов должна быть сформирована определённая булева функция входных переменных. Эту задачу можно решить синтезированием отдельно действующих узлов, каждый из которых реализует определённую выходную булеву функцию. Однако, даже при условии построения этих узлов минимальным образом, в целом логическое устройство может оказаться не минимальным, так как в узлах, реализующих различные выходные булевы функции, могут встречаться повторяющиеся элементы. Исходя из этих сооб-



ражений, приведение каждой из выходных функций к минимальной форме не является условием получения минимального устройства в целом.

При минимизации устройства в целом некоторые функции и импликанты лучше оставить в неминимальной форме, если они являются общими для нескольких выходов. Если функции имеют общие члены, то можно провести их совместную оптимизацию, выражая одну функцию через другую или вводя промежуточные функции, которые могут быть реализованы один раз и использованы при построении нескольких функций.

Рассмотри способ построения минимального логического устройства с несколькими выходами, функционирование которого задано таблицей 19.2.2.1.

Таблица 19.2.2.1

$x_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$x_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
$x_3$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
$x_4$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1

Для каждой функции заполняем карту Карно и проводим минимизацию.

Для функции  $f_1$  имеем:

$x_3x_4$		00	01	11	10
$x_1x_2$	00	0	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_4 \vee x_2\overline{x_4}.$$

Карта Карно для функции  $f_2$ :

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	0	1	1
10	1	0	1	1

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4.$$

Карта Карно для функции  $f_3$ :

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_4 \vee x_1\bar{x}_4.$$

Работа устройства описывается системой булевых функций:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_2\bar{x}_4; \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4; \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_4 \vee x_1\bar{x}_4. \end{cases}$$

Из полученной системы выписываем полное множество конъюнкций:

$$K_1 = \bar{x}_1x_3, K_2 = \bar{x}_1x_4, K_3 = x_2\bar{x}_4, K_4 = x_3x_4, K_5 = x_1\bar{x}_4.$$

Составляем таблицу покрытия конъюнкциями булевых функций, входящих в систему:

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
$f_1$	+	+	+		
$f_2$				+	+
$f_3$		+			+

Как видно из таблицы, конъюнкция  $K_2$  является общей для функций  $f_1$  и  $f_3$ , конъюнкция  $K_5$  является общей для функций  $f_2$  и  $f_3$ .

На логической схеме устройства (рис.19.2.2.1), каждой общей конъюнкции соответствует один логический элемент.

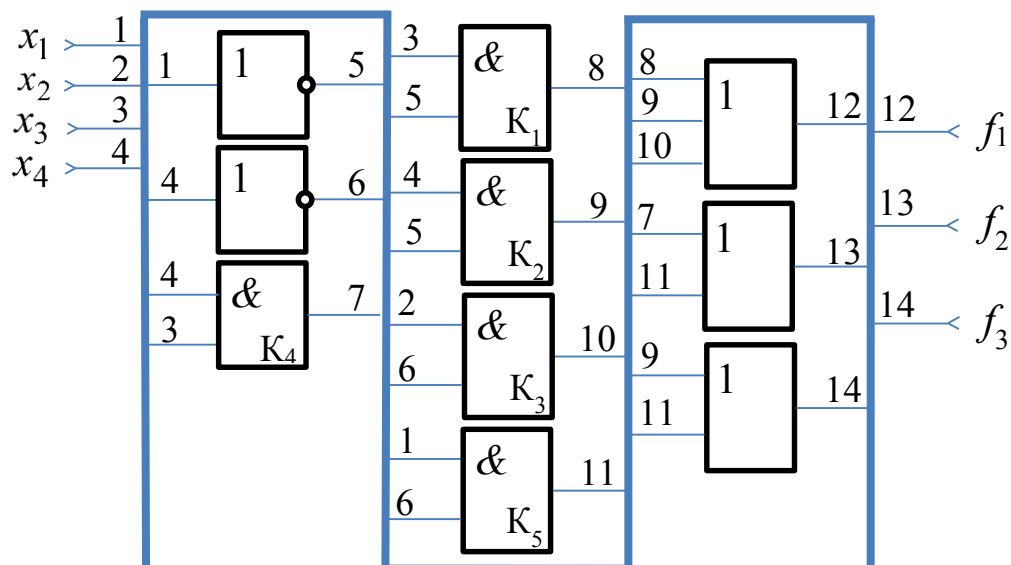


Рис.19.2.2.1. ЛС с однофазными входами и общей частью для выходных функций.

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.2.1. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов, необходимых для построения логической схемы, показано в таблице 19.2.2.2;

Таблица 19.2.2.2.

Логические элементы	на 1 вход	на 2 входа	на 3 входа	Всего элементов
<b>И</b>	—	5	—	<b>10</b>
<b>ИЛИ</b>	—	2	1	
<b>НЕ</b>	2	—	—	

- конструктивная сложность схемы определяется по Квайну - число входов логических элементов –  $S_Q=19$ ;

- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=3\tau$ .

### 19.2.3. Дешифратор (декодер)

Дешифратор (декодер) служит для преобразования  $n$ -разрядного позиционного двоичного кода в единичный выходной сигнал на одном из  $2^n$  выходов. При каждой входной комбинации сигналов на одном из выходов появляется 1. Таким образом, по единичному сигналу на одном из выходов можно судить о входной кодовой комбинации.

Рассмотрим двухразрядный дешифратор. Его условное графическое обозначение изображено на рисунке 19.2.3.1.

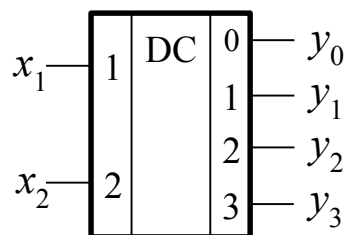


Рис.19.2.3.1. Условное графическое обозначение дешифратора.

Дешифратор имеет два входа  $x_1$ ,  $x_2$  и четыре выхода  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Его таблица истинности имеет вид:

$x_1$	$x_2$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Устройство имеет два входа  $x_1$ ,  $x_2$  и четыре выхода  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Для каждого выхода записывая СДНФ, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2; \\ y_1 = \bar{x}_1x_2; \\ y_2 = x_1\bar{x}_2; \\ y_3 = x_1x_2. \end{cases}$$

По этой системе уравнений строим логическую схему требуемого дешифратора (рисунок 19.2.3.2).

Проанализируем логическую схему, изображённую на рис. 19.2.3.2. Для этого определим элементную базу, оценим конструктивную сложность и быстродействие данной схемы:

- количество элементов необходимых для построения логической схемы показано в таблице 19.2.3.1.

Таблица 19.2.3.1.

Логические элементы	на 1 вход	на 2 входа	Всего элементов
<b>И</b>	—	4	6
<b>НЕ</b>	2	—	

- конструктивная сложность схемы –  $S_Q=10$ ;  
- число ярусов сигнала на самом длинном пути от входа к выходу-  $T=2\tau$ .

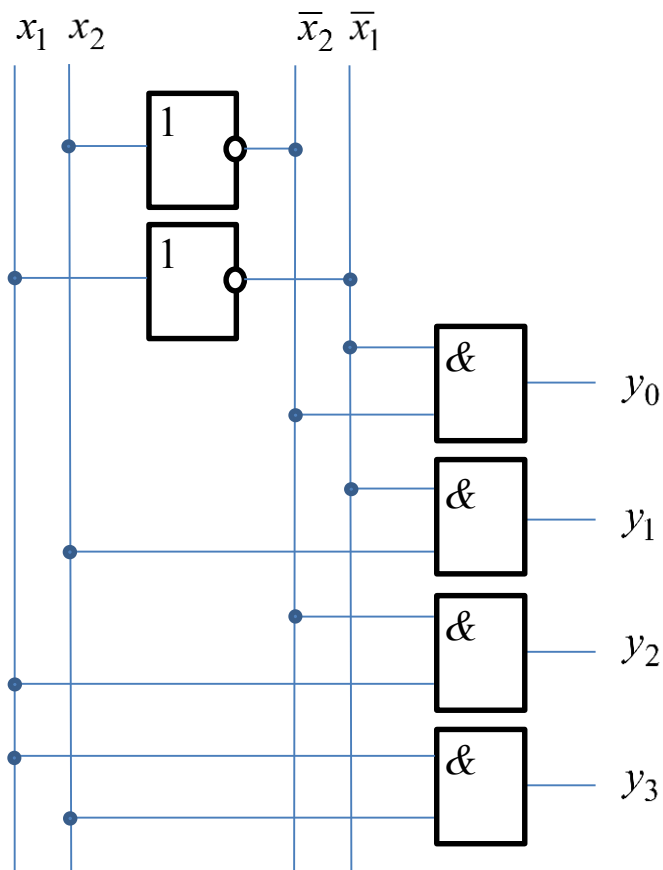


Рис. 19.2.3.2. Схема дешифратора.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Для данной функции  $f(x, y, z)$ :

1. Выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие – фиктивными.
2. Выразить  $f(x, y, z)$  формулой, содержащей только существенные переменные.

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	1011 1011	11	0101 0000	21	1010 0101
2	0011 1100	12	1100 1100	22	0011 0011
3	0101 1111	13	0100 0100	23	1011 1011
4	1000 1000	14	1111 0011	24	1111 1100

<b>5</b>	1010 0000	<b>15</b>	0000 0101	<b>25</b>	0110 0110
<b>6</b>	1100 1111	<b>16</b>	0000 0011	<b>26</b>	1010 1111
<b>7</b>	0010 0010	<b>17</b>	0011 0000	<b>27</b>	1010 1010
<b>8</b>	1100 0011	<b>18</b>	1101 1101	<b>28</b>	1110 1110
<b>9</b>	0000 1010	<b>19</b>	1111 0101	<b>29</b>	0001 0001
<b>10</b>	1001 1001	<b>20</b>	0111 0111	<b>30</b>	0011 1111

**Задача 2.** Построить таблицу булевой функции  $f(x, y, z)$ , заданной формулой.

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
<b>1</b>	$x \oplus y \wedge z \rightarrow \bar{x} \vee \bar{z}$	<b>16</b>	$x \leftrightarrow y \oplus z \vee \bar{y}$
<b>2</b>	$(x y) \rightarrow \bar{z} \wedge y \oplus x$	<b>17</b>	$x \vee y \wedge \bar{z} \oplus y$
<b>3</b>	$(x \rightarrow \bar{y}) \oplus z \vee x$	<b>18</b>	$(x \oplus y) \wedge z \vee \bar{x}$
<b>4</b>	$x \vee y \oplus \bar{z} \leftrightarrow y$	<b>19</b>	$(x \rightarrow \bar{y}) \oplus (z \vee y)$
<b>5</b>	$x \vee \overline{y \rightarrow z} \oplus y$	<b>20</b>	$(x y) \wedge z \vee \bar{x}$
<b>6</b>	$\bar{x} \vee y \rightarrow z \wedge y$	<b>21</b>	$(x \rightarrow y) \oplus z \leftrightarrow \bar{y}$
<b>7</b>	$(x \downarrow y) \vee \overline{x \rightarrow z}$	<b>22</b>	$(x \downarrow y) \leftrightarrow z \oplus y$
<b>8</b>	$(x \vee y \rightarrow z) \vee x \oplus y$	<b>23</b>	$(x \vee y) \oplus z \rightarrow y$
<b>9</b>	$(x y) \wedge z \rightarrow \bar{y} \vee x$	<b>24</b>	$x \wedge y \oplus z \rightarrow \bar{x}$
<b>10</b>	$(x \rightarrow y \wedge z) \oplus \bar{x}$	<b>25</b>	$(x \oplus (y \downarrow z)) \oplus y$
<b>11</b>	$x \vee y \wedge \bar{z} \rightarrow x \wedge y$	<b>26</b>	$\overline{x \rightarrow y \vee \bar{y}} \oplus z$
<b>12</b>	$(x \oplus y) \oplus (z \vee \bar{x})$	<b>27</b>	$(x y) \oplus (y \rightarrow z \wedge \bar{x})$
<b>13</b>	$x \vee y \oplus z \rightarrow \bar{y}$	<b>28</b>	$\overline{x \rightarrow y} \wedge (x \vee \bar{y} \oplus z)$
<b>14</b>	$(x \downarrow y) \oplus z \vee \bar{x}$	<b>29</b>	$y \oplus z \leftrightarrow z \wedge x \vee x$
<b>15</b>	$(x \vee y \rightarrow \bar{z}) \oplus y$	<b>30</b>	$x \vee \overline{y \rightarrow z} \leftrightarrow \bar{y} \oplus z$

**Задача 3.** Функция  $h(x, y)$  является суперпозицией функций  $f_n$  и  $f_k$ .

1. Построить логическую схему, реализующую функцию  $h(x, y)$ , при помощи логических элементов функций  $f_n$  и  $f_k$ . Для схемы найти задержку и цену по Квайну.

2. Написать таблицу функции  $h(x, y)$ , если

$$\begin{aligned} f_1 &= (10010111), & f_2 &= (01101011), & f_3 &= (11100110), \\ f_4 &= (01110011), & f_5 &= (11000111), & f_6 &= (10010100), \\ f_7 &= (10110101), & f_8 &= (10000110), & f_9 &= (10100110), \\ f_{10} &= (01011000). \end{aligned}$$

3. Выразить  $h(x, y)$  формулой.

№	$n$	$k$	$h(x, y)$	№	$n$	$k$	$h(x, y)$
1	1	2	$f_n(x, f_k(x, x, y), y)$	16	8	7	$f_n(x, x, f_k(y, x, y))$
2	2	1	$f_n(x, f_k(y, x, y), x)$	17	7	8	$f_n(y, f_k(x, y, x), y)$
3	1	2	$f_n(y, f_k(x, y, x), x)$	18	5	9	$f_n(x, f_k(y, x, x), y)$
4	3	5	$f_n(x, f_k(y, x, y), y)$	19	5	10	$f_n(y, f_k(x, y, x), x)$
5	3	2	$f_n(y, f_k(x, y, x), x)$	20	10	9	$f_n(x, f_k(x, x, y), y)$
6	4	3	$f_n(x, f_k(y, y, x), y)$	21	10	5	$f_n(f_k(x, x, y), y, x)$
7	2	3	$f_n(x, f_k(x, y, y), y)$	22	7	9	$f_n(f_k(y, y, x), x, y)$
8	5	2	$f_n(y, x, f_k(x, x, y))$	23	8	7	$f_n(f_k(x, y, y), y, x)$
9	5	4	$f_n(f_k(x, y, y), x, y)$	24	7	8	$f_n(f_k(x, y, x), x, y)$
10	3	2	$f_n(x, x, f_k(x, y, y))$	25	6	7	$f_n(f_k(y, y, x), y, x)$
11	4	3	$f_n(y, x, f_k(y, x, y))$	26	9	2	$f_n(x, f_k(y, y, x), y)$
12	2	4	$f_n(x, f_k(x, y, y), y)$	27	2	10	$f_n(x, y, f_k(x, y, x))$
13	5	7	$f_n(x, y, f_k(y, x, x))$	28	3	9	$f_n(f_k(y, y, x), x, x)$
14	9	8	$f_n(y, y, f_k(x, y, x))$	29	10	7	$f_n(y, x, f_k(x, y, x))$
15	7	5	$f_n(x, y, f_k(x, y, y))$	30	8	3	$f_n(x, f_k(y, y, x), y)$



**Задача 4.** Для булевой функции  $f(x, y, z)$ :

1. Построить логическую схему, реализующую функцию  $f(x, y, z)$  при помощи логических вентилях «И», «ИЛИ», «НЕ». Для схемы найти задержку и цену по Квайну.
2. Написать таблицу данной функции.
3. Найти фиктивные переменные функции  $f(x, y, z)$ .
4. Используя основные эквивалентности, преобразовать данную формулу в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных. Построить логическую схему, найти её задержку и цену по Квайну.

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	$\overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{xy} \vee \overline{xyz}$	16	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
2	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{x} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	17	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{xyz}$
3	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{xyz}$	18	$\overline{xyz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
4	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	19	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
5	$\overline{yz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	20	$\overline{xyz} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
6	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	21	$\overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{xz} \vee \overline{\overline{xyz}}$
7	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{xyz}}$	22	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{xyz} \vee \overline{\overline{xyz}}$
8	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	23	$\overline{xz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
9	$\overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{z}$	24	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
10	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}$	25	$\overline{\overline{xy}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
11	$\overline{xyz} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{yz}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	26	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}$
12	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{yz} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	27	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$
13	$\overline{\overline{yz}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	28	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{yz}}$
14	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	29	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$
15	$\overline{xz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	30	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{xz}}$

**Задача 5.** Преобразовать  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , используя формулу дизъюнктивного разложения по совокупности переменных  $x_n$ ,  $x_k$ , представляя получаемые функции от двух переменных формулами над множеством элементарных связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сумма по модулю два, эквивалентность, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

№	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$n$	$k$	№	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$n$	$k$
1	0110 1110 1101 1001	1	2	16	1100 0100 0111 0110	2	3
2	0110 1110 1101 1001	1	3	17	1100 0100 0111 0110	2	4
3	0110 1110 1101 1001	1	4	18	1100 0100 0110 0110	3	4
4	0110 1110 1101 1001	2	3	19	1110 0111 0101 1011	1	2
5	0110 1110 1101 1001	2	4	20	1110 0111 0101 1011	1	3
6	0110 1110 1101 1001	3	4	21	1110 0111 0101 1011	1	4
7	1010 1110 0110 0101	1	2	22	1110 0111 0101 1011	2	3
8	1010 1110 0110 0101	1	3	23	1110 0111 0101 1011	2	4
9	1010 1110 0110 0101	1	4	24	1110 0111 0101 1011	3	4
10	1010 1110 0110 0101	2	3	25	1010 0110 1111 0111	1	2
11	1010 1110 0110 0101	2	4	26	1010 0110 1111 0111	1	3
12	1010 1110 0110 0101	3	4	27	1010 0110 1111 0111	1	4
13	1100 0100 0111 0110	1	2	28	1010 0110 1111 0111	2	3
14	1100 0100 0111 0110	1	3	29	1010 0110 1111 0111	2	4
15	1100 0100 0111 0110	1	4	30	1010 0110 1111 0111	3	4

**Задача 6.** С помощью  $MS(4 \times 1)$  синтезировать булеву функцию трёх переменных  $f(x, y, z)$ .

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	0101 0000	11	1010 0101	21	1011 1011
2	1100 1100	12	0011 0011	22	0011 1100
3	0100 0100	13	1011 1011	23	0101 1111
4	1111 0011	14	1111 1100	24	1000 1000
5	0000 0101	15	0110 0110	25	1010 0000
6	0000 0011	16	1010 1111	26	1100 1111

7	0011 0000	17	1010 1010	27	0010 0010
8	1101 1101	18	1110 1110	28	1100 0011
9	1111 0101	19	0001 0001	29	0000 1010
10	0111 0111	20	0011 1111	30	1001 1001

### Задача 7.

1. Выяснить вопрос о равносильности ДНФ  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  сведением их к СДНФ.

2. Преобразовать с помощью дистрибутивных законов  $f_2$  в КНФ, упростить полученное выражение.

№	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	$yz \vee \overline{xy} \vee \overline{xy}$	$xz \vee \overline{xy}$	$z \vee \overline{y}$
2	$\overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xy}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{yz}$	$\overline{xz} \vee \overline{y} \vee \overline{xz}$
3	$\overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xy}$	$\overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{yz}$	$\overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{x}$
4	$\overline{xyz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xyz} \vee \overline{z} \vee \overline{xy}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz}$
5	$\overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$
6	$\overline{yz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xz} \vee \overline{xy}$	$\overline{xyz} \vee \overline{x}$
7	$\overline{xyz} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz}$	$\overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{z}$
8	$\overline{xyz} \vee \overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{z}$	$\overline{yz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz}$
9	$\overline{yz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xy}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz}$	$\overline{y} \vee \overline{z}$
10	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz}$	$\overline{x} \vee \overline{yz}$
11	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xyz}$	$\overline{yx} \vee \overline{xy} \vee \overline{x}$	$\overline{yz} \vee \overline{yz} \vee \overline{x}$
12	$\overline{xyz} \vee \overline{yx} \vee \overline{xyz} \vee \overline{yz}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{z}$	$\overline{yx} \vee \overline{xz} \vee \overline{xz}$
13	$\overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz}$	$\overline{x} \vee \overline{z}$
14	$\overline{yz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz}$	$\overline{yz} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee \overline{z}$
15	$\overline{zy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xz}$	$\overline{zy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz} \vee \overline{zx}$	$\overline{xyz} \vee \overline{y} \vee \overline{xyz}$
16	$\overline{xyz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xyz} \vee \overline{yz} \vee \overline{x}$	$\overline{xz} \vee \overline{yz}$
17	$\overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$
18	$\overline{xz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz}$	$\overline{y} \vee \overline{xyz}$

19	$xy \vee \overline{xyz} \vee xz \vee \overline{\overline{xyz}}$	$xy \vee \overline{yz} \vee yz$	$\overline{x} \vee \overline{xy} \vee yz$
20	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{yz} \vee yz \vee x$	$\overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xz}$
21	$xz \vee \overline{xz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{\overline{yz}}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee yz$	$\overline{x} \vee \overline{z}$
22	$\overline{xyz} \vee \overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee yz$	$\overline{y} \vee \overline{xz}$
23	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{xz} \vee \overline{xy} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee yz$	$\overline{xz} \vee y \vee \overline{xz}$
24	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{xz}} \vee \overline{xyz} \vee \overline{\overline{yz}}$	$\overline{yz} \vee x \vee \overline{xz}$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee yz$
25	$xy \vee \overline{\overline{xz}}$	$\overline{xy} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{yz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{xyz}$
26	$xz \vee y \vee \overline{\overline{xyz}}$	$xy \vee \overline{xz}$	$\overline{xyz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee yz$
27	$\overline{xy} \vee \overline{\overline{xz}} \vee yz$	$\overline{xy} \vee \overline{\overline{yz}} \vee \overline{xy} \vee xz$	$\overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{\overline{xz}}$
28	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xy}} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{yz} \vee \overline{xz}$	$\overline{xyz} \vee z$
29	$\overline{yz} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee \overline{xy} \vee \overline{\overline{xyz}}$	$\overline{xz} \vee yz \vee \overline{xz}$	$\overline{yz} \vee \overline{y} \vee \overline{xz}$
30	$\overline{xz} \vee y \vee xz$	$\overline{\overline{xyz}} \vee \overline{\overline{xz}} \vee \overline{\overline{xyz}} \vee yz$	$\overline{xy} \vee \overline{xy} \vee yz$

**Задача 8.** Для функции  $f(x, y, z)$ :

1. Найти двумя способами полином Жегалкина.
2. При помощи вентиля «И», «М<sub>2</sub>» и константы 1, которая считается данной, построить логическую схему, реализующую полином Жегалкина функции. Для ЛС найти задержку и цену по Квайну.
3. Найти СДНФ и СКНФ.
4. Используя вентили «И», «ИЛИ», «НЕ», построить логическую схему, реализующую СДНФ. Для ЛС найти задержку и цену по Квайну.

№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$
1	1001 0111	11	0011 1000	21	0111 1001
2	0110 1011	12	0001 0110	22	0100 1010
3	1110 0110	13	1101 1010	23	0011 1000
4	0111 1001	14	0101 1100	24	1000 0111
5	1100 0111	15	1110 1101	25	0110 0011
6	1001 0100	16	0010 1000	26	0111 1010
7	1011 0101	17	1010 1101	27	1101 0111

<b>8</b>	1000 0110	<b>18</b>	0010 0110	<b>28</b>	0011 1110
<b>9</b>	1010 0110	<b>19</b>	1010 0111	<b>29</b>	1101 1000
<b>10</b>	0101 1000	<b>20</b>	0101 1001	<b>30</b>	0110 0101

### Задача 9.

1. Доопределить функции  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$ ,  $h(x, y, z)$  так, чтобы  $f \in M$ ,  $g \in L$ ,  $h \in S$ . Если построение какой-либо функции невозможно, докажите это.

2. Выясните вопрос о принадлежности построенных функций к классам  $T_0$  и  $T_1$ .

№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	$h(x, y, z)$
1	- 10 - 1 - - - -	- 10 - - 0 - 0	- 0 - - 11 - 1
2	- - - 01 - - -	0 - - - 110 -	11 - - 10 - -
3	- - - 0 - 10 -	- - - 00 - 10	- 1 - - 01 - 0
4	- 1 - - - - 0 -	01 - 0 - 1 - -	101 - 1 - - -
5	- - - 0 - 01 -	0 - 10 - - - 1	- - 10 - - 01
6	- - 1 - - 0 - -	- 01 - - 1 - 1	- 1 - 0 - 1 - 0
7	- 0 - 0 1 - - -	1 - - - 001 -	- 00 - 1 - - 1
8	- 1 - 1 - - 0 -	- - - 11 - 01	- 1 - - 10 - 0
9	- 01 - - 0 - -	10 - 1 - 0 - -	0 - - - 101 -
10	- - - 01 - 1 -	1 - 01 - - - 0	1 - - 1 - 00 -
11	- 1 - - - - 01	1 - 1 - - - 00	1 - 10 - - 1 -
12	0 - - 01 - - -	- - 001 - 0 -	- - 10 - - 00
13	0 - 1 - - 0 - -	- - 101 - 1 -	- 10 - 0 - - 1
14	01 - - - - 0 -	- 00 - 1 - 1 -	11 - 1 - 0 - -
15	- - - 01 - - 1	0 - - - 001 -	- 010 - - - 1
16	- - 1 - - 0 - 1	- 10 - 0 - - 1	- 1 - - 10 - 0
17	- 1 - - - 10 -	0 - - 1 - 0 - 0	00 - 1 - 1 - -
18	- - 001 - - -	- - 1 - 11 - 0	00 - 0 - 0 - -
19	- 01 - - 0 - -	- - - 001 - 0	01 - - 01 - -
20	- 1 - - 0 - 0 -	1 - - 0 - 1 - 1	0 - 10 - - 0 -
21	- - - 01 - 1 -	- - 0 - 00 - 1	- - - 1 - 010
22	- - 11 - 0 - -	- - - 110 - 1	- 1 - - 10 - 0
23	- 10 - - - 0 -	1 - - - 110 -	0 - - 1 - 10 -

<b>24</b>	- 01 - - 0 - -	- 01 - 1 - - 0	- 1 - 0 - 0 - 1
<b>25</b>	- 0 - 01 - - -	- 1 - 01 - 01	1 - - 0 - 10 -
<b>26</b>	- 1 - 1 - - 0 -	1 - - 0 - 01 -	- - 01 - - 11
<b>27</b>	- 0 - 01 - - -	01 - 1 - 0 - -	0 - 00 - - 0 -
<b>28</b>	- - 11 - 0 - -	- 10 - 1 - 0 -	0 - - 1 - 01 -
<b>29</b>	- 1 - - 011 -	01 - - 1 - 0 -	- 101 - - - 0
<b>30</b>	- - - 011 - -	- 0 - - 101 -	00 - 0 - 0 - -

### Задача 10.

1. Можно ли из функции  $f(x, y, z)$  с помощью суперпозиций получить  $g(x, y, z)$ ?
2. Верно ли, что  $f(x, y, z) \in [g]$ ?

№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$
<b>1</b>	1001 0110	1110 0110	<b>16</b>	1010 0100	1000 1110
<b>2</b>	1001 0100	1101 0100	<b>17</b>	0101 1110	1011 0000
<b>3</b>	0111 1010	1000 0110	<b>18</b>	1101 0000	1101 0100
<b>4</b>	1101 1010	1010 1010	<b>19</b>	1100 0001	1101 1000
<b>5</b>	0110 1111	1010 0110	<b>20</b>	1001 1000	1110 1000
<b>6</b>	1000 0110	1001 1000	<b>21</b>	1011 0010	1100 0110
<b>7</b>	0110 1110	1001 0010	<b>22</b>	1000 1100	0011 1010
<b>8</b>	1000 0110	1101 1001	<b>23</b>	1001 0110	1111 0010
<b>9</b>	1100 0111	1001 1110	<b>24</b>	1100 1110	1000 0001
<b>10</b>	1010 0110	1001 0110	<b>25</b>	1100 0011	1001 1000
<b>11</b>	1110 1000	1100 1000	<b>26</b>	1001 0110	1101 1100
<b>12</b>	1000 0000	1100 0011	<b>27</b>	0111 1010	1001 1010
<b>13</b>	0111 1110	1101 0000	<b>28</b>	1101 0000	1110 1000
<b>14</b>	1110 0000	1011 0010	<b>29</b>	1111 0111	1010 1000
<b>15</b>	1110 1111	1100 0010	<b>30</b>	1000 1000	1001 0110

### Задача 11.

1. Для функций  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  выяснить вопрос об их принадлежности классам  $T_0, T_1, L, S, M$ .

2. В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный класс, то:

- выразить из неё с помощью суперпозиций функции  $0, 1, \bar{x}, xy$ ;
- реализовать функции  $0, 1, \bar{x}, xy$  на логических элементах функции, представляющей функционально полный класс.

3. В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный в слабом смысле класс, то:

- выразить из неё с помощью суперпозиций и фиксирования переменных функции  $\bar{x}, xy$ ;
- реализовать функции  $\bar{x}, xy$  на логических элементах функции, представляющей функционально полный в слабом смысле класс.

№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	№	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$
1	1100 0111	1101 1000	16	1110 1111	1100 0010
2	1110 1010	0011 0101	17	1101 1110	1011 0011
3	0100 1101	1100 1110	18	1100 0001	1101 1110
4	1111 0100	1001 1010	19	1101 0000	1101 0100
5	0110 1001	1101 0100	20	1011 0010	1100 0110
6	1000 0010	0000 1101	21	1001 1000	1110 1000
7	1011 1101	1100 0100	22	0001 0110	1111 0010
8	1111 1010	0101 1111	23	1000 1100	0011 1010
9	1000 0001	1110 1010	24	1100 0011	1000 0001
10	1101 1100	0001 1010	25	1100 1110	1001 1000
11	0010 0000	1100 1000	26	1001 1110	0101 0100
12	1001 0000	1000 0011	27	1101 0000	1110 1001
13	1110 0000	1011 0010	28	0111 1010	1011 1010
14	0111 1110	1101 0000	29	1000 1100	1001 0111
15	0010 0100	1000 1110	30	1111 0111	1011 1100

**Задача 12.** Для данной функции  $f(x, y, z, w)$ , заданной векторно, проделать следующее:

1. Записать её СДНФ и СКНФ.
2. Методом Квайна найти сокращённую ДНФ.
3. Для сокращённой ДНФ построить матрицу Квайна, указать ядровые импликанты.

4. С помощью матрицы Квайна найти минимальную ДНФ, указать её сложность.

5. Найти минимальные ДНФ и КНФ данной функции с помощью карт Карно.

6. По полученным минимальным ДНФ и КНФ построить комбинационные схемы с однофазными входами в булевом базисе. Определить цену и задержку каждой из схем.

№	$f(x, y, z, w)$	№	$f(x, y, z, w)$
1	1111 0101 0011 1101	16	0100 1110 1101 1111
2	1101 1110 1010 1110	17	1111 1110 0111 1100
3	0111 0001 1111 1101	18	1000 1011 1111 1111
4	1011 1111 1111 1000	19	1111 1101 1110 0001
5	1101 0101 1101 1111	20	1101 0111 1100 1110
6	1111 1110 1010 0011	21	1011 1111 1010 1101
7	1111 0010 0111 1110	22	1001 1101 1010 1111
8	1100 1110 1111 1011	23	1110 0110 1111 1100
9	1100 0110 1111 0111	24	0011 1011 1010 1111
10	1011 1111 1110 0010	25	1111 0110 1110 1110
11	1011 1111 0001 1111	26	1001 1011 1111 1010
12	1110 1100 1111 1001	27	1001 1110 0111 0011
13	1111 1110 0111 0011	28	1010 1111 0111 0011
14	1110 0110 1111 1100	29	0111 0111 0101 1011
15	1101 1111 1110 1010	30	1111 0011 0111 0111

### Задача 13.

1. Для функций  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z, w)$ ,  $h(x, y, z, w, t)$  найти минимальные ДНФ и минимальные КНФ с помощью карт Карно, указать сложности минимальных ДНФ.

2. Для функции  $h(x, y, z, w, t)$  по полученным минимальным ДНФ и КНФ построить схемы с парафазными входами в универсальных базисах И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Определить цену и задержку каждой из схем.



№	
1	$f(x, y, z) = (1011\ 1100)$ $g(x, y, z, w) = (1110\ 1110\ 1111\ 0001)$ $h(x, y, z, w, t) = (1011\ 1110\ 1100\ 1111\ 1111\ 0001\ 0101\ 1100)$
2	$f(x, y, z) = (0111\ 1010)$ $g(x, y, z, w) = (1111\ 0010\ 1111\ 0111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1100\ 1011\ 1011\ 1110\ 1110\ 1011\ 0111\ 1111)$
3	$f(x, y, z) = (1001\ 1001)$ $g(x, y, z, w) = (1101\ 1001\ 1111\ 0011)$ $h(x, y, z, w, t) = (1011\ 1111\ 0011\ 0001\ 0110\ 1101\ 1011\ 1110)$
4	$f(x, y, z) = (1110\ 1110)$ $g(x, y, z, w) = (1011\ 1010\ 1111\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (1100\ 1100\ 1110\ 1111\ 1000\ 1111\ 1011\ 1111)$
5	$f(x, y, z) = (1010\ 1111)$ $g(x, y, z, w) = (1101\ 1100\ 1111\ 1101)$ $h(x, y, z, w, t) = (1101\ 0011\ 1111\ 1101\ 1110\ 1101\ 0111\ 1100)$
6	$f(x, y, z) = (0110\ 1111)$ $g(x, y, z, w) = (1111\ 1011\ 0011\ 1101)$ $h(x, y, z, w, t) = (1011\ 1100\ 1111\ 1000\ 0111\ 1011\ 1110\ 0101)$
7	$f(x, y, z) = (1000\ 1101)$ $g(x, y, z, w) = (1010\ 1111\ 1011\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (1100\ 1110\ 0111\ 1111\ 0001\ 1111\ 1011\ 0111)$
8	$f(x, y, z) = (0111\ 0110)$ $g(x, y, z, w) = (1100\ 1110\ 1100\ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1010\ 1110\ 1111\ 1101\ 0111\ 1001\ 1110\ 0000)$
9	$f(x, y, z) = (1110\ 0011)$ $g(x, y, z, w) = (1101\ 1011\ 1111\ 1101)$ $h(x, y, z, w, t) = (1001\ 1100\ 1101\ 1111\ 1101\ 1111\ 0001\ 1011)$

<b>10</b>	$f(x, y, z) = (0111\ 0101)$ $g(x, y, z, w) = (1010\ 1110\ 1110\ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1010\ 1110\ 0111\ 1110\ 0011\ 1110\ 0110\ 0101)$
<b>11</b>	$f(x, y, z) = (1000\ 1111)$ $g(x, y, z, w) = (1001\ 0001\ 1110\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (0101\ 1110\ 1110\ 0111\ 0111\ 1110\ 1101\ 0110)$
<b>12</b>	$f(x, y, z) = (1011\ 0111)$ $g(x, y, z, w) = (1101\ 1011\ 1110\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (1010\ 0111\ 1101\ 1111\ 1000\ 1111\ 1110\ 1001)$
<b>13</b>	$f(x, y, z) = (0011\ 1101)$ $g(x, y, z, w) = (0111\ 1011\ 0011\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (1001\ 1100\ 1110\ 1111\ 1100\ 1111\ 1010\ 0000)$
<b>14</b>	$f(x, y, z) = (1011\ 0111)$ $g(x, y, z, w) = (1000\ 0110\ 1111\ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (0110\ 1101\ 1111\ 1101\ 1111\ 1011\ 0111\ 1110)$
<b>15</b>	$f(x, y, z) = (0111\ 0101)$ $g(x, y, z, w) = (1011\ 1101\ 0011\ 0111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1010\ 1111\ 1011\ 1101\ 0111\ 1110\ 1101\ 1110)$
<b>16</b>	$f(x, y, z) = (0111\ 1110)$ $g(x, y, z, w) = (1100\ 1100\ 0111\ 1100)$ $h(x, y, z, w, t) = (1101\ 0111\ 1101\ 1011\ 0111\ 1110\ 1111\ 0000)$
<b>17</b>	$f(x, y, z) = (1111\ 0110)$ $g(x, y, z, w) = (0011\ 0111\ 1111\ 1011)$ $h(x, y, z, w, t) = (0101\ 1000\ 1111\ 1100\ 1000\ 1110\ 1110\ 0111)$
<b>18</b>	$f(x, y, z) = (0111\ 1001)$ $g(x, y, z, w) = (1100\ 1100\ 1110\ 0011)$ $h(x, y, z, w, t) = (0100\ 1111\ 1101\ 0111\ 1111\ 0101\ 1110\ 1101)$

<b>19</b>	$f(x, y, z) = (1000 \ 1110)$ $g(x, y, z, w) = (0111 \ 1110 \ 0011 \ 1110)$ $h(x, y, z, w, t) = (0001 \ 1111 \ 1011 \ 1101 \ 0010 \ 1111 \ 1000 \ 1000)$
<b>20</b>	$f(x, y, z) = (0111 \ 1001)$ $g(x, y, z, w) = (1010 \ 1110 \ 1111 \ 1101)$ $h(x, y, z, w, t) = (1011 \ 0001 \ 1111 \ 1100 \ 0111 \ 1001 \ 1110 \ 1110)$
<b>21</b>	$f(x, y, z) = (0101 \ 1100)$ $g(x, y, z, w) = (1111 \ 0011 \ 1011 \ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1001 \ 1011 \ 1100 \ 1110 \ 0001 \ 0111 \ 1011 \ 1000)$
<b>22</b>	$f(x, y, z) = (0111 \ 0101)$ $g(x, y, z, w) = (1100 \ 0000 \ 1110 \ 1101)$ $h(x, y, z, w, t) = (1011 \ 1111 \ 1101 \ 0111 \ 1110 \ 1110 \ 0111 \ 0001)$
<b>23</b>	$f(x, y, z) = (1001 \ 0110)$ $g(x, y, z, w) = (1101 \ 1110 \ 1101 \ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (0111 \ 1110 \ 1110 \ 0011 \ 1111 \ 0011 \ 1001 \ 1111)$
<b>24</b>	$f(x, y, z) = (0001 \ 1100)$ $g(x, y, z, w) = (1100 \ 1110 \ 0111 \ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1010 \ 1111 \ 1101 \ 1100 \ 1111 \ 1010 \ 1101 \ 0110)$
<b>25</b>	$f(x, y, z) = (1000 \ 1110)$ $g(x, y, z, w) = (1010 \ 0111 \ 1110 \ 1100)$ $h(x, y, z, w, t) = (0111 \ 0111 \ 1010 \ 0011 \ 1111 \ 0010 \ 1010 \ 1111)$
<b>26</b>	$f(x, y, z) = (1110 \ 0101)$ $g(x, y, z, w) = (1101 \ 1001 \ 1111 \ 0111)$ $h(x, y, z, w, t) = (0110 \ 1111 \ 1110 \ 1010 \ 0110 \ 0110 \ 1101 \ 0010)$
<b>27</b>	$f(x, y, z) = (1101 \ 1100)$ $g(x, y, z, w) = (0011 \ 0011 \ 1011 \ 1111)$ $h(x, y, z, w, t) = (1001 \ 1110 \ 1001 \ 1111 \ 0010 \ 1001 \ 1111 \ 0011)$

<b>28</b>	$f(x, y, z) = (1110\ 0110)$ $g(x, y, z, w) = (1010\ 0101\ 1111\ 1011)$ $h(x, y, z, w, t) = (0111\ 1011\ 1011\ 1111\ 1111\ 1011\ 0010\ 1111)$
<b>29</b>	$f(x, y, z) = (0001\ 1111)$ $g(x, y, z, w) = (1101\ 0111\ 1110\ 0110)$ $h(x, y, z, w, t) = (1101\ 0100\ 1111\ 0111\ 1110\ 0110\ 1111\ 1000)$
<b>30</b>	$f(x, y, z) = (1100\ 0011)$ $g(x, y, z, w) = (0110\ 1101\ 1111\ 1000)$ $h(x, y, z, w, t) = (0111\ 1010\ 1110\ 0111\ 1110\ 0111\ 1110\ 0110)$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев, В.Б. Лекции по дискретной математике: Учебное пособие. - М.: НИЦ Инфра-М, 2012. - 90 с.

2. Барашев В.П., Унучек С.А. Дискретная математика: Учебное пособие Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»- М., 2012. -268 с., электронное издание.

3. Бойко, В.И. и др. Схемотехника электронных систем. Цифровые устройства / Авторы: В.И. Бойко, А.Н. Гуржий, В.Я. Жуйков, А.А. Зори, В.М. Спивак, В.В. Багрий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.

4. Булева алгебра и логические элементы: Методические указания по дисциплине «Дискретная математика» для студентов заочной формы обучения специальностей 230201 «Информационные системы и технологии» и 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» / Составители: Никищенков С.А., Смышляев В.А., Припутников А.П. – Самара: СамГАПС, 2004. – 20 с.

5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с.
6. Довгий П.С., Поляков В.И. Синтез комбинационных схем. Учебное пособие к курсовой работе по дисциплине "Дискретная математика" – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 64 с.
7. Закраевский А.Д., Поттосин Ю.В., Черемисинова Л.Д. Логические основы проектирования дискретных устройств. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 502 с.
8. Иопа Н.И. Синтез автоматов без памяти: учебное пособие – Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2011. – 92 с.
9. Калугина А.Е., Лебедин А.А., Назаренко М.А., Омельяненко М.Н. Дополнительные главы схемотехники: учебное пособие – М.: ВНИИгеосистем, 2013. - 72 с.
10. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 5-е изд., стер. – СПб: Издательство «Лань», 2007. – 400 с.
11. Лобанов В.И. Русская вероятностная логика. - М.: «Русская Правда», 2009 - 320с.
12. Макоха А. Н., Сахнюк П. А., Червяков Н. И. Дискретная математика: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 368 с.
13. Насыров И. А. Конспекты лекций по цифровой электронике. Учебное пособие. – Казань: КГУ, 2006. – 98 с.
14. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2007. — 364 с.
15. Пономарев В. Ф. Дискретная математика для инженеров: учеб. пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2009. – 320 с.
16. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 325 с.
17. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. БХВ-Санкт-Петербург, 2000-528с.
18. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов - 2-е изд. дополненное. - М., Техносфера, 2005. – 400 с.
19. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. 4-е издание, стереотипное - М.: Высшая школа, 2003. - 484 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1.	Интерпретация булевой функции.....	3
2.	Логические элементы.....	7
3.	Булевы функции.....	8
4.	Равенство функций.....	14
4.1.	Графическая интерпретация фиктивной переменной.....	19
5.	Основные эквивалентности для элементарных функций.....	20
6.	Графическая интерпретация некоторых эквивалентностей.....	25
7.	Логические схемы.....	28
8.	Теорема о дизъюнктивном разложении булевой функции по переменным.....	34
8.1.	Применение формулы дизъюнктивного разложения при реализации булевой функции на мультиплексо-ре.....	37
8.2.	Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы.....	44
9.	Полные системы. Примеры полных систем.....	50
10.	Теорема Жегалкина о представимости булевой функции полиномом.....	51
11.	Замкнутые классы.....	60
11.1.	Класс функций, сохраняющих константу 0.....	60
11.2.	Класс функций, сохраняющих константу 1.....	60
11.3.	Класс самодвойственных функций.....	61
11.4.	Класс монотонных функций.....	63
11.5.	Класс линейных функций.....	65
11.6.	Замкнутость классов $T_0$ , $T_1$ , $S$ , $M$ и $L$ .....	66
12.	Лемма о несамодвойственной функции.....	67
13.	Лемма о немонотонной функции.....	69

14.	Лемма о нелинейной функции.....	71
15.	Теорема Поста о полноте системы булевых функций.....	73
16.	Функциональная полнота в слабом смысле.....	78
17.	Теорема о максимальном числе булевых функций в базисе.....	88
17.1.	Примеры построение логических схем булевых функций в различных базисах.....	89
18.	Минимизация булевых функций.....	94
18.1.	Общие принципы минимизации.....	94
18.2.	Представление элементарных конъюнкций в формализованном виде. Операция склеивания.....	95
18.3.	Сокращённая ДНФ.....	98
18.4.	Минимальная ДНФ.....	101
18.5.	Тупиковая ДНФ.....	103
18.6.	Алгоритм минимизации булевой функции в классе нормальных форм.....	109
18.7.	Карты Карно.....	115
19.	Задачи анализа и синтеза логических схем.....	127
19.1.	Задача анализа логических схем.....	128
19.2.	Задача синтеза логических схем.....	130
19.2.1.	Факторизация.....	134
19.2.2.	Синтез ЛС с несколькими выходами.....	136
19.2.3.	Дешифратор (декодер).....	140
	Задачи для самостоятельного решения.....	142
	Библиографический список .....	156

*Учебное издание*

**Исмагилова Елена Ивановна**

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ**

Учебное пособие

Подписано в печать Формат

Печ. л. Усл. кр.-отт.

Тираж экз Изд.№ Заказ№

ФГБОУ ВПО «МГТУРЭА (МИРЭА)»  
119454, Москва, пр. Вернадского, д. 78