Центр современного образования

Е.И.ИСМАГИЛОВА

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва 2008

УДК 51:37
ББК 22.141

Рецензенты: к.ф.м.н. Кузнецова Т.А, д.ф.м.н. Фомин А.А.

Исмагилова Е.И. Комплексные числа и символический метод расчета электрических цепей переменного тока: Учебное пособие / – Ярославль, 2008. - 94 с.

ISBN

Материалы пособия позволяют самостоятельно разобраться не только в математической, но и в физической сущности комплексных чисел, выработать практические навыки применения комплексных чисел и гармонических функций для решения задач расчета цепей синусоидального тока. В пособии приводится достаточное количество подробно разобранных задач с расчетами в пакете Mathcad, даются упражнения для самостоятельной работы.

Для студентов 1-х и 2-х курсов технических вузов, в которых изучается электротехника.

Введение

Учебное пособие ставит своей целью углубить и систематизировать знания студентов о комплексных числах и гармонических функциях, научиться использовать их при решении задач расчета цепей переменного тока.

Представление переменных синусоидальных электрических величин комплексными числами – это главная идея символического метода, который изучается в курсе «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ). С его помощью интегро-дифференциальные уравнения, составленные по законам Кирхгофа для линейных электрических цепей переменного тока, преобразуются в алгебраические уравнения и приобретают вид законов Кирхгофа в цепях постоянного тока. Символический метод позволяет совместить простоту и наглядность векторных диаграмм с возможностью проведения точных аналитических расчетов. В этом и состоит главная особенность данного метода, обеспечившая ему широчайшее распространение при расчетах цепей переменного тока. Использование трёх форм записи комплексных выражений расширяет сферу его применимости и является его преимуществом.

Символический метод демонстрирует применение операционного (символического) исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пропедевтическое изучение символического метода позволяет:

- познакомить студентов первого курса с применением операционного исчисления;
- подготовить их к решению задач профессионального содержания при изучении операционного исчисления в курсе дифференциальных уравнений;
- создать необходимую физико-математическую базу для дальнейшего изучения курса ТОЭ и специальных электротехнических дисциплин;
- позволяет подготовить студентов к проектированию радиоэлектронных устройств (частотных фильтров, разветвителей, мостов Ланге, сумматоров, усилителей, генераторов, фазовращающих решеток, мультивибраторов, схем сравнения уровней и т.д.).

В электротехнике на основе ГОСТов [13, 14] строго определены единые требования к терминологии и буквенным обозначениям основных величин. В физике и математике имеются свои классические обозначения, поэтому возникают ситуации, когда одни и те же величины в физике, электротехнике и математике обозначаются по-разному. В таблице 1 приведены примеры различий в обозначениях некоторых величин, используемых в пособии.

Таблица 1.

Величины	*Обозначение в учебных пособиях*		
	физики	*Электро-техники*	*математики*
ЭДС источника питания	$\mathscr{E}$	E	$\mathscr{E}$
Действующее значение тока	$I_{эфф}$	I	*используются редко*
Действующее значение напряжения	$\mathscr{E}_{эфф}$	U	
Плотность тока	j	δ	j
Синусоидальный ток	i	i	i
Температура	t	θ	t
Мнимая единица	i или j	j	i
Вектор, изображающий синусоидальную функцию времени	$\vec{A}$ или $\boldsymbol{A}$	$\dot{A}$	$\vec{A}$ или $\boldsymbol{A}$

Чтобы в сознании студентов не было разрозненности одних и тех же понятий, в пособии применяются терминология и обозначения, принятые в электротехнике.

Для лучшего усвоения теоретического материала приводится достаточное количество подробно разобранных задач с расчетами в пакете Mathcad, даются упражнения для практической и самостоятельной работы.

ЛЕКЦИЯ №1. Необходимые сведения о комплексных числах

Электрическая энергия, как известно, широко применяется во всех областях промышленности, сельского хозяйства, связи, транспорта, автоматики, вычислительной техники, электроники, радиотехники и в быту благодаря своим весьма ценным универсальным свойствам:

1) она преобразуется в другие виды энергии (тепловую, механическую, химическую и др.). В свою очередь другие виды энергии (тепловая, механическая, химическая, ядерная, гидро- и др.) преобразуются в электрическую;

2) передаётся на большие расстояния с небольшими потерями. В настоящее время действуют линии электропередачи протяжённостью тысячи километров;

3) легко дробится и распределяется по потребителям любой мощности (от десятков тысяч киловатт до долей ватта);

4) легко регулируется и контролируется различными электроприборами.

Электрическая энергия в настоящее время производится и используется преимущественно в виде энергии переменного тока. Это объясняется, в первую очередь, возможностью трансформировать переменный ток, т.е. преобразовывать в широких пределах напряжение и силу тока почти без потерь энергии. Такие преобразования необходимы во многих электро- и радиотехнических устройствах. Но особенно важна трансформация напряжения и силы тока при передаче электроэнергии на большие расстояния.

Переменным электрическим током называют ток, периодически изменяющийся по величине и направлению. Говоря о переменном токе, обычно имеют в виду синусоидальный переменный ток, т.е. ток, изменяющийся по синусоидальному закону. Почему именно синусоидальные функции времени применяются для описания линейных электрических цепей переменного тока?

При прохождении через элементы линейной электрической цепи ток подвергается следующим преобразованиям: на активном сопротивлении –

умножению на постоянную величину; на чисто индуктивном элементе – дифференцированию; на чисто емкостном – интегрированию. Рассчитывая цепи приходится многократно выполнять эти линейные операции, поэтому удобно применять такой ток, форма которого остается неизменной на всех участках сколь угодно сложной электрической цепи.

Другое существенное обстоятельство - это то, что генерирование переменного электрического тока на практике легче всего осуществить в машинах с вращающимися проводниками. Полученный таким образом ток будет периодическим.

Единственной функцией, удовлетворяющей выше описанным обстоятельствам и подходящей для описания переменного тока, является синусоидальная функция времени. Она периодическая и воспроизводится при многократных операциях дифференцирования и интегрирования. Поэтому переменный ток, применяемый в промышленности, почти всегда имеет форму: $i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$, где I_m, ω и ψ - постоянные величины.

Применение синусоидального переменного тока потребовало решения многих теоретических вопросов и практических задач, что послужило основанием для разработки целой области теоретических основ электротехники, получившей в начале XX столетия название теории переменных токов. Но при анализе цепей переменного тока электрические величины представляются в форме синусоидальных функций, поэтому математические расчеты усложняются и становятся весьма громоздкими. Чтобы упростить вычисления, синусоидально изменяющиеся токи, напряжения, э. д. с. и т.д. стали представлять векторами или комплексными числами. Этот метод получил название символического, поскольку в нем оригиналы (синусоидальные функции) заменяются своими символами (комплексными числами или векторами). Символические изображения, развитые сначала в теории колебаний, были применены к теории переменных токов впервые американским инженером Ч.П. Штейнметцем и введены в России акад. В. Ф. Миткевичем [6].

С помощью комплексных чисел в электротехнике в теории электрических цепей могут быть представлены как величины (напряжения, токи, сопротивления и т.д.), так и зависимости между этими величинами (законы Ома, Кирхгофа). Применение комплексных чисел даёт возможность унифицировать расчёты цепей постоянного и переменного тока, т.е. использовать все законы, формулы, методы расчётов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчёта цепей переменного тока.

В наши дни обнаружилось ещё одно существенное преимущество символического метода: к нему относительно легко можно приспособить компьютерный способ расчёта.

Чтобы познакомиться с символическим методом нам понадобятся знания о комплексных числах, полученные в курсе алгебры. В процессе повторения сделаем акцент на выработку умений, необходимых для решения задач электротехники.

Различные формы записи комплексных чисел. В электротехнике, в отличие от математики, мнимую единицу обозначают не i, а j, чтобы не путать с обозначением тока.

Для прямоугольной декартовой системы координат, введенной на комплексной плоскости, в электротехнике тоже используют свои обозначения: мнимая ось обозначается «j», а действительная – «+».

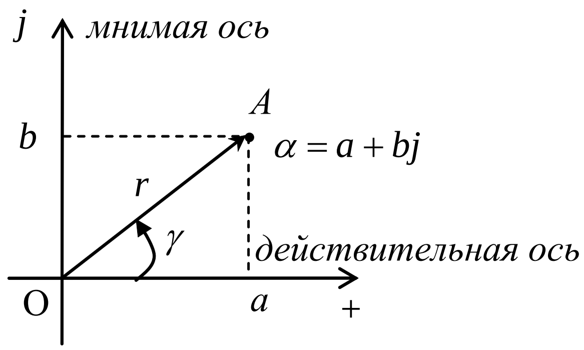


Рис.1.1

Комплексное число $\alpha = a + bj$ на плоскости (рис.1.1) в прямоугольной декартовой системе координат изображается либо точкой A с абсциссой a и ординатой b, либо радиус-вектором этой точки $\overrightarrow{OA}$. Так как OA является гипотенузой прямоугольного треугольника, то $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $a = r \cdot \cos\gamma$, $b = r \cdot \sin\gamma$.

Длина вектора $\left|\overrightarrow{OA}\right| = r$ называется *модулем комплексного числа* α и обозначается через $|\alpha|$:

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1.1)$$

Угол γ, образованный вектором $\overrightarrow{OA}$ с положительным направлением оси «+», такой что $-\pi < \gamma \le \pi$, называется *главным аргументом числа* α и обозначается $arg\alpha$.

Главное значение аргумента можно вычислять по следующим формулам:

$$\arg\alpha = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, \quad a > 0; \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, \quad a < 0,\ b > 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a}, \quad a < 0,\ b < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad a = 0, \quad b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad a = 0, \quad b < 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

или

$$\begin{cases} \sin(\arg\alpha) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \cos(\arg\alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \end{cases} \qquad (1.3)$$

Для действительной и мнимой части комплексного числа $\alpha = a + bj$ справедливы равенства:

$a = |\alpha| \cdot \cos(\arg\alpha) = \mathrm{Re}[\alpha]$ - действительная часть;

$b = |\alpha| \cdot \sin(\arg\alpha) = \mathrm{Im}[\alpha]$ - мнимая часть.

Пример 1.1. Изобразить комплексное число β на плоскости и вычислить мнимую и действительную части, если модуль $|\beta| = 2$ и аргумент $\arg\beta = 60^0$.

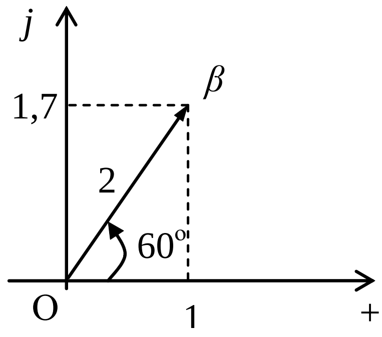


Рис.1.2

Решение. На рис.1.2 изображено комплексное число β, для которого:

$\mathrm{Re}[\beta] = 2\cdot\cos 60^0 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$

$\mathrm{Im}[\beta] = 2\cdot\sin 60^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7;$

$\beta = 2\cdot\cos 60^0 + j\cdot 2\cdot\sin 60^0 = 1 + j\cdot 1{,}7.$

Комплексное число может быть представлено в следующих формах:

алгебраической $\alpha = a + bj$;

тригонометрической $\alpha = |\alpha|\cdot(\cos(\arg\alpha) + j\sin(\arg\alpha))$;

показательной $\alpha = |\alpha|\cdot e^{j\cdot\arg\alpha}$.

Для перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной определяют модуль, аргумент комплексного числа и используют формулу Эйлера:

$$e^{j\cdot\arg\alpha} = \cos(\arg\alpha) + j\sin(\arg\alpha). \tag{1.4}$$

При обратном переходе от показательной формы записи к алгебраической вначале переходят к тригонометрической форме записи комплексного числа при помощи формулы Эйлера, а затем к алгебраической.

Пример 1.2. Перевести в показательную форму следующее число: $z = -10 - j\cdot 0{,}8$.

Решение. Модуль комплексного числа равен

$|z| = \sqrt{(-10)^2 + (-0{,}8)^2} = \sqrt{100 + 0{,}64} \approx 10,$

а аргумент вычисляется по формуле

$$\arg z = -180^0 + arctg\left(\frac{-0{,}8}{-10}\right) \approx -180 + 4.57 = -175.43.$$

Поэтому $z = -10 - j \cdot 0{,}8 \approx 10 \cdot e^{-j \cdot 175.43}$.

Ниже приведена программа расчёта в Mathcad.

Присвоение z комплексного значения

$z := -10 - 0.8 \cdot i$

Вычисление модуля комплексного числа z

$|z| = 10.032$

Вычисление аргумента комплексного числа z в радианах

$\psi := \arg(z) \qquad \psi = -3.062$

Вычисление комплексного числа z в градусах

$\psi_1 := \arg(z) \cdot \frac{180}{\pi} \qquad \psi_1 = -175.426$

Пример 1.3. Записать в алгебраической форме комплексное число $z = 13 \cdot e^{j \cdot 22.66}$.

Решение. $z = 13 \cdot e^{j \cdot 22.66} = 13 \cdot \cos 22.66 + j \cdot 13 \cdot \sin 22.66 \approx$

$\approx 13 \cdot 0.923 + j \cdot 13 \cdot 0.385 \approx 12 + j \cdot 5.$

Программа расчёта в пакете Mathcad.

Задание аргумента комплексного числа в градусах.

$\psi := 22.66$

Перевод из градусов в радианы.

$\psi_1 := \psi \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \psi_1 = 0.395$

Запись комплексного числа z в алгебраической форме.

$z := 13 \cdot e^{\psi_1 \cdot i} \qquad z = 11.996 + 5.008i$

Комплексное число $\overline{\alpha} = a - bj = |\alpha| \cdot e^{-j \cdot \arg \alpha}$ называется *комплексно сопряженным* к числу $\alpha = a + bj = |\alpha| \cdot e^{j \cdot \arg \alpha}$.

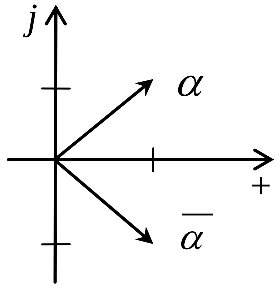


Рис.1.3

Например, $\alpha = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$ и $\overline{\alpha} = 1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}}$. На рис.1.3 показаны вектора, соответствующие этим числам.

Действия над комплексными числами. Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить. Рассмотрим эти операции для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Если $\alpha = 3 + 4j$, $\beta = 5 - 2j$, то

$$\alpha + \beta = 3 + 4j + 5 - 2j = 8 + 2j;$$

$$\alpha - \beta = 3 + 4j - 5 + 2j = -2 + 6j.$$

$$\alpha \cdot \beta = (3 + 4j) \cdot (5 - 2j) = 15 + 20j - 6j + 8 = 23 + 14j = 27 \cdot e^{31.33^0}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3 + 4j}{5 - 2j} = \frac{(3 + 4j) \cdot (5 + 2j)}{(5 - 2j) \cdot (5 + 2j)} = \frac{15 + 6j + 20j - 8}{25 - 10j + 10j + 4} = \frac{7 + 26j}{29} =$$

$$= \frac{7}{29} + \frac{26}{29} \cdot j = 0{,}93 \cdot e^{j \cdot 74.93^0} \quad .$$

На рис.1.4 показано, что сложение и вычитание комплексных чисел соответствует сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа.

Из курса алгебры известно:

- при умножении любого конечного количества комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются;
- при делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются.

Эти правила применяются при умножении и делении комплексных чисел в тригонометрической или показательной формах записи.

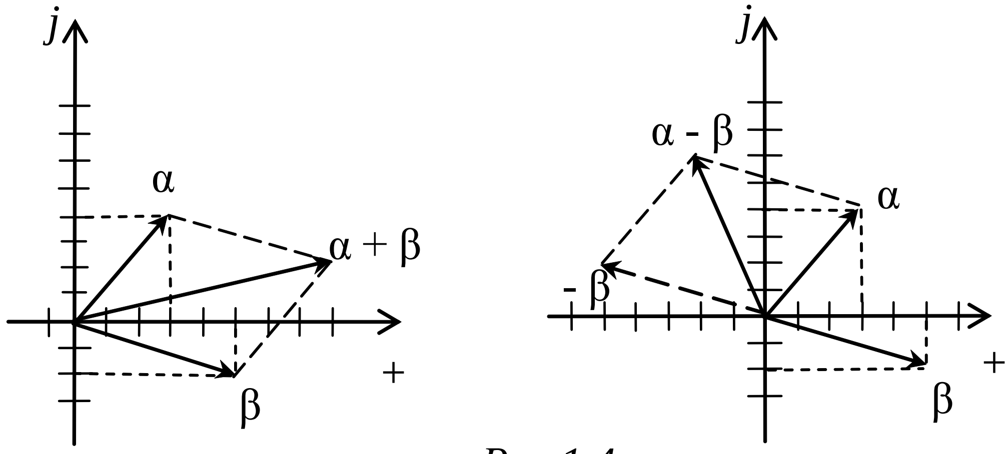


Рис.1.4

Представим числа α и β в соответствующих формах

$$\alpha = 3 + 4j = 5 \cdot \left(\cos 53.13^0 + j \cdot \sin 53.13^0\right) = 5 \cdot e^{j \cdot 53.13^0},$$

$$\beta = 5 - 2j = 5{,}4 \cdot \left(\cos\left(-21.8^0\right) + j \cdot \sin\left(-21.8^0\right)\right) = 5{,}4 \cdot e^{-j \cdot 21.8^0}.$$

Операции умножения и деления проведем сначала в тригонометрической, а затем в показательной форме.

$$\beta \cdot \alpha = 5{,}4 \cdot \left(\cos\left(-21.8^0\right) + j \cdot \sin\left(-21.8^0\right)\right) \cdot 5 \cdot \left(\cos 53.13^0 + j \cdot \sin 53.13^0\right) =$$

$$= 27 \cdot \left(\cos\left(-21.8^0 + 53.13^0\right) + j \cdot \sin\left(-21.8^0 + 53.13^0\right)\right) =$$

$$= 27 \cdot \left(\cos 31.33^0 + j \cdot \sin 31.33^0\right),$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3 + 4j}{5 - 2j} = \frac{5 \cdot \left(\cos 53.13^0 + j \cdot \sin 53.13^0\right)}{5{,}4 \cdot \left(\cos\left(-21.8^0\right) + j \cdot \sin\left(-21.8^0\right)\right)} =$$

$$= 0{,}93 \cdot \left(\cos 74.93^0 + j \cdot \sin 74.93^0\right),$$

$$\beta \cdot \alpha = 5{,}4 \cdot e^{-j \cdot 21.8^0} \cdot 5 \cdot e^{j \cdot 53.13^0} = 27 \cdot e^{j \cdot \left(-21.8^0 + 53.13^0\right)} = 27 \cdot e^{j \cdot 31.33^0},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3 + 4j}{5 - 2j} = \frac{5 \cdot e^{j \cdot 53.13^0}}{5{,}4 \cdot e^{-j \cdot 21.8^0}} = 0{,}93 \cdot e^{j \cdot \left(53.13^0 + 21.8'^0\right)} = 0{,}93 \cdot e^{j \cdot 74.93^0}.$$

На рис.1.5 показан геометрический смысл умножения комплексных чисел β и α. Точку, изображающую произведение $\beta \cdot \alpha$, мы получим, если вектор, идущий от O к β повернем против часовой стрелки на угол $\arg\alpha = 53^0 7'$, а затем растянем его в $|\alpha| = 5$ раз (если $0 \le |\alpha| < 1$ это будет сжатие, а не растяжение). Иначе говоря, преобразование плоскости, переводящее всякую точку β в точку $(\beta \cdot \alpha)$, есть произведение поворота на угол $\arg\alpha$ и гомотетии с коэффициентом $|\alpha|$ и центром O.

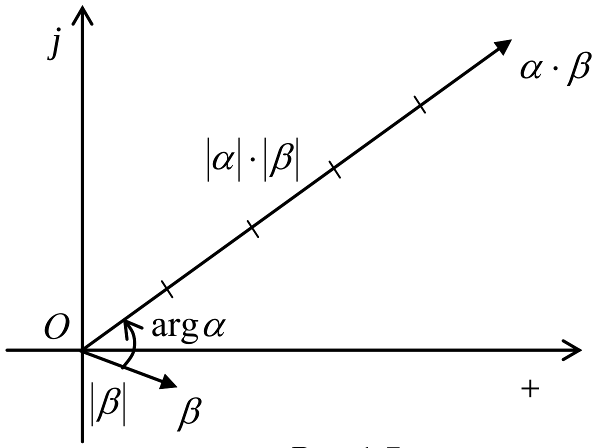


Рис.1.5

Таким образом, складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить – в тригонометрической или показательной формах.

Произведение комплексно сопряженных чисел есть действительное число, равное квадрату их модуля. Действительно, если $\alpha = a + bj = |\alpha| \cdot e^{j \cdot \arg\alpha}$ и $\overline{\alpha} = a - bj = |\alpha| \cdot e^{-j \cdot \arg\alpha}$, то

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 - abj + abj + b^2 = a^2 + b^2 = |\alpha|^2,$$

или $\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha| \cdot e^{j \cdot \arg\alpha} \cdot |\alpha| \cdot e^{-j \cdot \arg\alpha} = |\alpha|^2 \cdot e^{j \cdot (\arg\alpha - \arg\alpha)} = |\alpha|^2 \cdot e^{j \cdot 0} = |\alpha|^2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Различные формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами.

1 Для каждого заданного комплексного числа написать ему противоположное и сопряженное; на плоскости изобразить вектора, соответствующие этим числам:

а) $-3+5j$; в) $-7-3j$; д) $4j$; ж) -9;

б) $4-j$; г) $8+3j$; е) $-3j$; з) $-4j-1$.

2. Изобразите на комплексной плоскости и запишите в тригонометрической и показательной форме следующие комплексные числа:

а) $3+2j$; д) 4; и) $4-3j$;

б) $3-2j$; е) -2; к) $\sin\alpha+j\cos\alpha \quad (0<\alpha<\pi)$;

в) $-3+2j$; ж) $12+5j$; л) $-cos\dfrac{\pi}{7}+j\sin\dfrac{\pi}{7}$;

г) $-3+2j$; з) $-1-j\sqrt{3}$; м) $1+cos\dfrac{\pi}{3}+j\sin\dfrac{\pi}{3}$.

3. Для каждого комплексного числа записать его комплексно сопряженное число; полученные комплексно сопряженные числа представить в показательной форме: а) $3{,}2+1{,}25j$; б) $-0{,}125+3{,}2j$; в) $-2{,}8-64j$.

4. Для каждого комплексного числа записать его комплексно сопряженное число; полученные комплексно сопряженные числа представить в алгебраической форме: а) $7{,}3\cdot e^{-j\cdot 86.63^0}$; б) $150\cdot e^{j\cdot 92.35^0}$; в) $-32\cdot e^{-j\cdot 2.3^0}$.

5. Выбрав масштаб, изобразите на комплексной плоскости сумму и разность комплексных чисел:

а) $z_1=5-3j$ и $z_2=-1+6j$; б) $z_1=2+2j$ и $z_2=1-j$.

6. Выбрав масштаб, изобразите на комплексной плоскости z_1/z_2 и $z_1\cdot z_2$: а) $z_1=1-j\sqrt{3}$ и $z_2=-2$; б) $z_1=-4j$ и $z_2=\sqrt{2}-j\sqrt{2}$.

7. Используя алгебраическую форму комплексного числа выполните указанные действия:

а) $\dfrac{3+4j}{-2+7j}$; б) $\dfrac{(2+j)(-1+4j)}{3-2j}$; в) $\dfrac{-4+5j}{(1+3j)(5-2j)}$;

г) $\dfrac{5+7j}{8-6j}+\dfrac{(1+2j)^2}{2+j}$; д) $\left(-2(1+j)^3+\dfrac{31-17j}{4-3j}\right)\cdot\dfrac{1+j}{6}-1$.

8. Используя показательную форму комплексного числа вычислить:

а) $\sqrt{3}\left(\cos 92^0 + j\cdot\sin 92^0\right)\cdot\left(-3+\sqrt{3}j\right)$; б) $\left(-\sqrt{5}+\sqrt{5}j\right)^3(1+j)^2$;

в) $\dfrac{\left(\cos 42^0 + j\cdot\sin 42^0\right)}{\left(\cos 51^0 + j\cdot\sin 51^0\right)^2}$; г) $\dfrac{2\sqrt{3}-2j}{(-1+j)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}j\right)}$.

Задание на дом.

Требования к решению задач: 1) составить алгоритм решения задачи и на компьютере в пакете Mathcad рассчитать искомые параметры; 2) все необходимые чертежи выполнить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге.

1. Для каждого заданного комплексного числа записать его противоположное и сопряженное; на плоскости изобразить вектора, соответствующие этим числам; комплексно сопряженные числа представить в трёх формах: тригонометрической, показательной и алгебраической.

а) $z=-1$; г) $z=-3\cdot e^{-j\cdot 60^0}$;

б) $z=-1+j$; д) $z=1{,}25-3{,}2j$;

в) $z=-2-2j$; е) $z=32\cdot e^{-j\cdot 35^0}$.

2. Выбрав масштаб, изобразите на комплексной плоскости сумму и разность комплексных чисел $z_1=-4-7j$ и $z_2=-3+5j$.

3. Выбрав масштаб, изобразите на комплексной плоскости z_1/z_2 и $z_1\cdot z_2$, если $z_1=4+3j$ и $z_2=5j$.

<u>ЛЕКЦИЯ №2.</u> Поворотный множитель. Комплексная и синусоидальная функции времени

Поворотный множитель. Комплексная функция времени.

Пусть $e^{j\cdot\gamma}=\cos\gamma+j\cdot\sin\gamma$, тогда $\left|e^{j\cdot\gamma}\right|=\sqrt{\cos^2\gamma+\sin^2\gamma}=1$. Это комплексное число изображается на плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол γ с положительным направлением оси *Ox*.

Если комплексное число $\beta = |\beta| e^{j \cdot \psi}$ умножить на число $e^{j \cdot \gamma}$, то умножение сводится к повороту радиус – вектора $\overrightarrow{OB}$, соответствующего числу β, на угол γ (рис.2.1): $\beta \cdot e^{j \cdot \gamma} = |\beta| e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \gamma} = |\beta| e^{j \cdot (\psi + \gamma)}$. Поэтому множитель $e^{j \cdot \gamma}$ называют *поворотным* или *оператором поворота*.

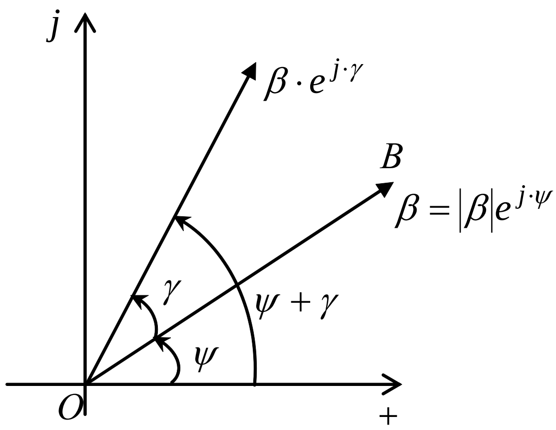


Рис.2.1

Например, при $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ и

$$e^{j \cdot \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} \right) + j \cdot \sin\left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} \pm j \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \pm j,$$

умножение комплексного числа $\beta = |\beta| e^{j \cdot \psi}$ на множитель $\pm j$ означает поворот соответствующего радиус-вектора $\overrightarrow{OB}$ на угол $\pm \frac{\pi}{2}$.

Если аргумент поворотного множителя сделать функцией времени, например $\gamma = \omega \cdot t$, то вектор $\overrightarrow{OB}$, соответствующий комплексному числу $\beta = |\beta| e^{j \cdot \psi}$, будучи умноженным на $e^{j \cdot \omega \cdot t}$, превратится во вращающийся с угловой скоростью ω радиус-вектор. В этом случае выражение

$$\beta \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = |\beta| e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = |\beta| e^{j \cdot (\psi + \omega \cdot t)} \tag{2.1}$$

называется *комплексной функцией времени*. Угол ψ в выражении (2.1) показывает положение вектора $\overrightarrow{OB}$ в начальный момент времени ($t = 0$).

Действительная часть комплексной функции времени будет

$$\mathrm{Re}\left[|\beta| e^{j \cdot (\psi + \omega \cdot t)} \right] = \mathrm{Re}\left[|\beta| \cdot \cos(\psi + \omega \cdot t) + j \cdot |\beta| \cdot \sin(\psi + \omega \cdot t) \right] =$$

$$= |\beta| \cdot \cos(\psi + \omega \cdot t) = |\beta| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi + \omega \cdot t \right), \tag{2.2}$$

а мнимая -

$$\operatorname{Im}\left[|\beta| e^{j\cdot(\psi+\omega\cdot t)}\right] = \operatorname{Im}\left[|\beta|\cdot\cos(\psi+\omega\cdot t) + j\cdot|\beta|\cdot\sin(\psi+\omega\cdot t)\right] =$$
$$= |\beta|\cdot\sin(\psi+\omega\cdot t) \qquad (2.3)$$

Выражения (2.2) и (2.3) представляют собой гармонические колебания, которые определяются *синусоидальными функциями времени.*

Синусоидальная функция времени.

Синусоидальная функция времени или *мгновенное значение синусоидальной величины* задается формулой:

$$a(t) = A_m \cdot \sin(\omega\cdot t + \psi). \qquad (2.4)$$

Каждая синусоидальная величина характеризуется амплитудой, угловой частотой и начальной фазой.

Амплитуда – это максимальное значение периодически изменяющейся величины. Обозначим ее A_m. Нетрудно видеть, что синусоидальная функция времени достигает своих амплитудных значений, когда $|\sin(\omega\cdot t+\psi)| = 1$.

Период – это минимальное время, в течение которого переменная величина делает полный цикл своих изменений, после чего изменения повторяются в той же последовательности. Обозначается период буквой T и измеряется в секундах.

Частота – число периодов в единицу времени, т.е. величина, обратная периоду. Обозначается частота буквой *f*, $f = \dfrac{1}{T}$, и измеряется в герцах. Стандартной частотой в электрических сетях России является частота $f = 50$ Гц. При частоте $f = 50$ Гц, т.е. 50 периодов в секунду, период $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ с.

Угловая частота (угловая скорость) – характеризуется углом поворота в единицу времени. Обозначается угловая частота буквой ω, $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$. Измеряется угловая частота в единицах радиан в секунду (рад/с), так как угол α измеряется в радианах. За время одного периода T совершается поворот на угол

$360^0 = 2\pi$ рад. Поэтому, угловую частоту можно выразить следующим образом: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$.

Начальная фаза – угол, определяющий значение синусоидальной величины в начальный момент времени $(t = 0)$. Обозначается начальная фаза ψ.

Величина $(\omega \cdot t + \psi)$ называется фазой или фазовым углом.

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин <u>одинаковой частоты</u> определяет *угол сдвига фаз* этих величин.

Пример 2.1. Для синусоидальных функций

$$a_1(t) = 100 \cdot \sin\left(157 \cdot t + \frac{\pi}{10}\right) \text{ и } a_2(t) = 25 \cdot \sin\left(157 \cdot t - \frac{\pi}{8}\right),$$

определить сдвиг фаз, период и частоту. В пакете Mathcad на одном рисунке построить графики функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Решение. Синусоидальные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ имеют <u>одинаковую частоту</u> и их начальные фазы равны соответственно $\psi_1 = \dfrac{\pi}{10}$, $\psi_2 = -\dfrac{\pi}{8}$, поэтому угол сдвига фаз будет $\psi_1 - \psi_2 = \dfrac{\pi}{10} - \left(-\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{9\pi}{40}$ рад. Так как $\omega = 157\ \ рад/с$, то период будет $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{157} = 0{,}04\ \ с$ и частота $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}04} = 25$ Гц.

Построение в пакете Mathcad.

Исходные данные.

$\omega := 157$

$A_{m1} := 100 \qquad \psi_1 := \dfrac{\pi}{10}$

$A_{m2} := 25 \qquad \psi_2 := \dfrac{-\pi}{8}$

Вычисление периода.

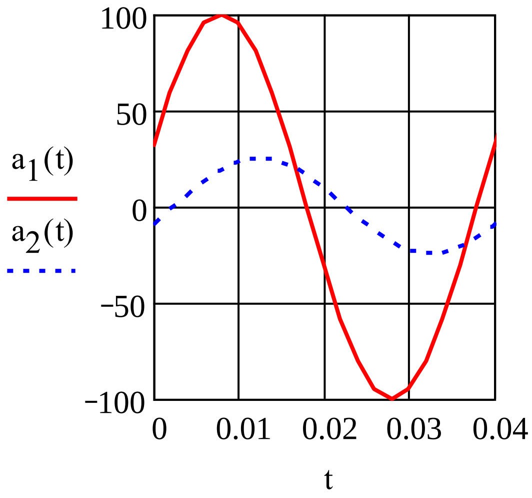
$T := \dfrac{2\pi}{\omega} \qquad T = 0.04$

Задание синусоидальных функций.

$$a_1(t) := A_{m1}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_1)$$
$$a_2(t) := A_{m2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_2)$$

Для построения графиков временных диаграмм функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ определим время как дискретный аргумент.

$$n := 20 \qquad h := \frac{T}{n} \qquad t := 0, 0 + h .. T$$



Рассчитывая электрические цепи, часто приходится выполнять такие линейные операции как сложение, умножение на число, дифференцирование и интегрирование. При этом суммируются синусоидальные функции времени <u>одинаковой частоты</u>, но с различными амплитудами и начальными фазами. Например, если $a_1(t) = A_{m1}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_1)$ и $a_2(t) = A_{m2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_2)$, то

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A_{m1}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_1) + A_{m2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_2) = A_m\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi),$$

где A_m и ψ находятся при помощи тригонометрических формул:

$$tg\psi = \frac{A_{m1}\sin\psi_1 + A_{m2}\sin\psi_2}{A_{m1}\cos\psi_1 + A_{m2}\cos\psi_2}; \qquad (2.5)$$

$$A_m = \sqrt{(A_{m1}\cos\psi_1 + A_{m2}\cos\psi_2)^2 + (A_{m1}\sin\psi_1 + A_{m2}\sin\psi_2)^2}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. Найти разность двух синусоидальных токов $i_1(t) = 100\sin(314\cdot t + 30^0)A$ и $i_2(t) = 120\sin(314\cdot t - 45^0)A$.

Решение. $i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 100\sin(314\cdot t + 30^0) - 120\sin(314\cdot t - 45^0) =$

$$=100\sin\left(314\cdot t+30^0\right)+120\sin\left(314\cdot t+135^0\right)=I_m\sin\left(314\cdot t+\gamma\right);$$

$$I_m=\sqrt{\left[100\cos\left(30^0\right)+120\cos\left(135^0\right)\right]^2+\left[100\sin\left(30^0\right)+120\sin\left(135^0\right)\right]^2}=$$

$$=\sqrt{100^2+120^2+2\cdot100\cdot120\cdot\left(\cos\left(30^0\right)\cdot\cos\left(135^0\right)+\sin\left(30^0\right)\cdot\sin\left(135^0\right)\right)}=$$

$$=\sqrt{100^2+120^2+2\cdot100\cdot120\cdot\cos\left(105^0\right)}=135\ A;$$

$$tg\gamma=\frac{100\sin30^0+120\sin135^0}{100\cos30^0+120\cos135^0}=19{,}4\ \text{ и }\ \gamma=87^0.$$

В результате получим: $i(t)=i_1(t)-i_2(t)=135\sin\left(314\cdot t+87^0\right)\ A$.

Сложение трех и более синусоидальных функций приводит к очень громоздким вычислениям. Ниже будет показано, что переход к комплексным числам значительно облегчает вычисления и делает их более понятными.

Дифференцируя и интегрируя синусоидальные функции времени, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[A_m\cdot\sin(\omega\cdot t+\psi)\right]=\omega\cdot A_m\cdot\cos(\omega\cdot t+\psi)=\omega\cdot A_m\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\psi+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int A_m\sin(\omega\cdot t+\psi)dt=-\frac{1}{\omega}\cdot A_m\cdot\cos(\omega\cdot t+\psi)=\frac{1}{\omega}\cdot A_m\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\psi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2.3. (Цепь с активным сопротивлением.) В цепи (рис.2.2) с активным сопротивлением R проходит синусоидальный ток $i(t)=I_m\sin(\omega\cdot t+\psi)$. Найти напряжение.

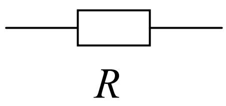


Рис.2.2

Решение. В соответствии с законом Ома для мгновенных значений имеем $u_R(t)=R\cdot i(t)=R\cdot I_m\sin(\omega\cdot t+\psi)$.

Пример 2.4. (Цепь с идеальной индуктивностью.) В цепи (рис.2.3) с идеальной индуктивностью L проходит синусоидальный ток $i(t)=I_m\sin(\omega\cdot t+\psi)$. Найти напряжение.

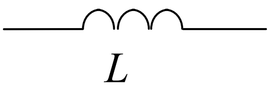


Рис.2.3

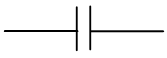
Решение. Идеальной называют индуктивность L такой катушки, активным сопротивлением и емкостью которой можно пренебречь. Напряжение найдем по закону электромагнитной индукции:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left[I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)\right] = L \cdot \omega \cdot I_m \sin\left(\omega \cdot t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Произведение $L\omega$ обозначают X_L и называют *индуктивным сопротивлением*.

Таким образом, индуктивность оказывает переменному току сопротивление прямо пропорциональное частоте. Кроме того, напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90°.

Пример 2.5. (Цепь с емкостью.) Пусть в цепи (рис.2.4), содержащей идеальный конденсатор (т.е. конденсатор с идеальным диэлектриком), проходит ток $i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$. Вычислить напряжение.



C

Рис.2.4

Решение. Напряжение вычисляется по формуле:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i\, dt = \int I_m \sin(\omega \cdot t + \psi) dt = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Выражение $\dfrac{1}{C \cdot \omega}$ обозначают X_C и называют е*мкостным сопротивлением.*

Итак, на конденсаторе сопротивление обратно пропорционально частоте, и напряжение отстает по фазе от тока на 90°.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Поворотный множитель. Комплексная функция времени. Синусоидальная функция времени

1. Комплексное число z представить в показательной форме и умножить на оператор поворота $e^{j \cdot \varphi}$; числа z и $z \cdot e^{j \cdot \varphi}$ изобразить на комплексной плоскости:

а) $z = 2 + 3j$ и $\varphi = -30^0$; б) $z = -4 - 2j$ и $\varphi = 45^0$.

2. Мнимую и действительную части комплексной функции времени представить в виде синусоидальных функций времени:

а) $5 \cdot e^{j \cdot \left(314 \cdot t + 30^0\right)}$; б) $100 \cdot e^{j \cdot \left(2000 \cdot t - 60^0\right)}$.

3. Запишите комплексную функцию времени, если ее действительная часть имеет вид:

а) $120 \cdot \cos\left(30^0 + \omega \cdot t\right)$; б) $100 \cdot \sin\left(-45^0 + \omega \cdot t\right)$.

4. Для синусоидальной функции времени $a(t) = 34 \cdot \sin\left(212 \cdot t + 54^0\right)$ выписать амплитуду, угловую частоту, начальную фазу, фазовый угол. Вычислить период и частоту. В пакете Mathcad построить график данной функции.

5. Даны синусоидальные функции:

а) $a_1(t) = 4 \cdot \sin\left(157 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$ и $a_2(t) = 50 \cdot \sin\left(700 \cdot t + \frac{\pi}{12}\right)$;

б) $a_1(t) = 4 \cdot \sin\left(500 \cdot t - 35^0\right)$ и $a_2(t) = 8 \cdot \sin\left(500 \cdot t + 32^0\right)$;

в) $a_1(t) = 4 \cdot \sin\left(700 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$ и $a_2(t) = 50 \cdot \sin\left(700 \cdot t + \frac{\pi}{12}\right)$;

г) $a_1(t) = 2 \cdot \sin\left(157 \cdot t + 90^0\right)$ и $a_2(t) = 4 \cdot \sin\left(157 \cdot t + 45^0\right)$.

Если возможно, определить сдвиг фаз между этими синусоидальными функциями, вычислить период и частоту. В пакете Mathcad построить на одном рисунке графики функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

6. Найти сумму двух синусоидальных функций путем непосредственного вычисления по формулам (2.5) и (2.6):

а) $a_1(t) = 2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 90^0\right)$ и $a_2(t) = 4 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right)$;

б) $a_1(t) = 100 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$ и $a_2(t) = 150 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{12}\right)$.

В пакете Mathcad построить на одном рисунке графики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a(t) = a_1(t) + a_2(t)$.

7. Пусть в цепи проходит ток $i(t) = 4\sin\left(100 \cdot t - 37^0\right)$. Вычислите напряжение на: 1) активном сопротивлении при $R = 5$ *Ом*; 2) на индуктивном сопротивлении при $L = 0{,}25$ *Гн*; 3) на емкостном сопротивлении при $C = 800 \cdot 10^{-6}$ *Ф*. В пакете Mathcad построить на одном рисунке графики полученных напряжений $u_R(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$.

Задание на дом.

Требования к решению задач: все необходимые чертежи выполнить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге.

1. Комплексное число z представить в показательной форме и умножить на оператор поворота $e^{j\cdot\varphi}$; числа z и $z \cdot e^{j\cdot\varphi}$ изобразить на комплексной плоскости:

б) $z = -5 + 2j$ и $\varphi = 60^0$; б) $z = 5 - 3j$ и $\varphi = -90^0$.

2. Запишите комплексную функцию времени, если ее действительная часть имеет вид: а) $100 \cdot \cos\left(-135^0 + \omega \cdot t\right)$; б) $5 \cdot \sin(150 + \omega \cdot t)$.

3. Для комплексной функции времени

а) $100 \cdot e^{j\cdot\left(157\cdot t - 135^0\right)}$, б) $15 \cdot e^{j\cdot\left(100\cdot t + 120^0\right)}$

действительную и мнимую части запишите в виде синусоидальных функций времени; для каждой из полученных синусоидальных функций времени выпишите амплитуду, угловую частоту, начальную фазу, фазовый угол, найти период и частоту.

4. Найти сумму двух синусоидальных функций путем непосредственного вычисления по формулам (2.5) и (2.6), если $a_1(t) = 310 \cdot \sin(314 \cdot t)$ и $a_2(t) = 180 \cdot \sin\left(314 \cdot t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Определить сдвиг фаз между этими синусоидальными функциями, вычислить период и частоту. В пакете Mathcad построить на одном рисунке графики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a(t) = a_1(t) + a_2(t)$.

<u>ЛЕКЦИЯ №3.</u> Представление синусоидальных функций времени векторами или комплексными числами. Символический метод

В комплексной форме синусоидальную функцию времени

$$a(t) = A_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

можно представить в следующем виде:

$$a(t) = \mathrm{Im}[A_m \cos(\omega \cdot t + \psi) + j \cdot A_m \sin(\omega \cdot t + \psi)] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi)}\right] = \mathrm{Im}\left[A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right] = \mathrm{Im}\left[\dot{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right],$$

$$a(t) = \mathrm{Im}\left[\dot{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right]. \qquad (3.1)$$

В формуле (11) выражение $A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi)} = \dot{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ есть *комплексная функция времени*, а число

$$\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j \cdot \psi} = A_m \cos\psi + j \cdot A_m \sin\psi \qquad (3.2)$$

называется *комплексной амплитудой*.

Пример 3.1. Записать комплексную амплитуду для синусоидальной функции $a(t) = 8 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 20^0\right)$.

Решение. В данном случае амплитуда $A_m = 8$, а начальная фаза $\psi = 20^0$. Следовательно, $\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j \cdot \psi} = 8 \cdot e^{j \cdot 20^0}$.

Пример 3.2. Дана комплексная амплитуда $\dot{A}_m = 25 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$. Записать выражение для синусоидальной функции времени *a(t)*.

Решение. Для перехода от комплексной амплитуды к комплексной функции времени надо умножить $\dot{A}_m$ на $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ и взять мнимую часть от полученного произведения:

$$a(t) = \mathrm{Im}\left[\dot{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right] = \mathrm{Im}\left[25 \cdot \mathrm{e}^{j \cdot \left(\omega \cdot t - 30^0\right)}\right] = 25 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - 30^0\right).$$

Благодаря формуле (3.1) синусоидальную функцию времени $a(t)$ на плоскости можно изобразить вращающимся со скоростью ω радиус-вектором.

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат (рис.3.1). Так как комплексная амплитуда $\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j\cdot\psi}$ есть комплексное число, то на плоскости ей будет соответствовать радиус-вектор, который обозначим точно так же $\dot{A}_m$. Этот вектор будет располагаться под углом ψ относительно действительной оси, а длина его будет равна в выбранном масштабе амплитуде A_m.

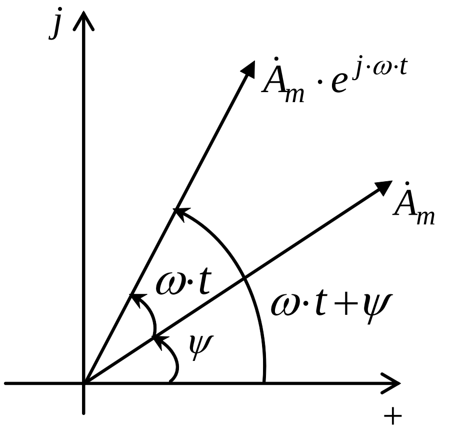


Рис.3.1

Положительные углы ψ откладываются против часовой стрелки, а отрицательные – по направлению движения часовой стрелки. Представим себе, что вектор $\dot{A}_m$ с момента $t=0$ начинает вращаться вокруг начала координат против направления движения часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте ω. В момент времени *t* вектор составит с действительной осью угол $(\omega \cdot t + \psi)$, равный фазе функции *a(t)*. Проекция вращающегося вектора на мнимую ось будет $A_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$ и равна, в выбранном масштабе, мгновенному значению рассматриваемой величины *a(t)*. Обозначим вращающийся вектор через $\dot{A}_{mt} = \dot{A}_m \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$. Таким образом, между мгновенным значением *a(t)* и вектором $\dot{A}_{mt}$ можно установить однозначную связь.

С целью единообразия, вектор $\dot{A}_{mt}$ принято изображать на комплексной плоскости для момента времени $t=0$. В этом случае $\dot{A}_{mt}\big|_{t=0} = \dot{A}_m \cdot e^{j\cdot\omega\cdot 0} = \dot{A}_m$, поэтому радиус-вектор, соответствующий комплексной амплитуде $\dot{A}_m$ называют *вектором, изображающим синусоидальную функцию времени.*

Пример 3.3. Выбрать масштаб и начертить вектор, изображающий заданную синусоидальную функцию времени $a(t) = 120 \cdot \sin(157 \cdot t + 45^0)$.

Решение.

1. Для построения вектора на комплексной плоскости сначала зададим определенный масштаб M_a (например $M_a = 40\ \text{ед/см}$).

2. Для заданной функции *a(t)* выпишем комплексную амплитуду. Так как

$$a(t) = 120\sin\left(157t + 45^0\right) = \mathrm{Im}\left[120e^{j\cdot\left(157t+45^0\right)}\right] = \mathrm{Im}\left[120e^{j\cdot\left(45^0\right)}e^{j\cdot 157t}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\dot{A}_m \cdot e^{j\cdot 157t}\right],$$

то комплексная амплитуда будет $\dot{A}_m = 120\cdot e^{j\cdot 45^0}$.

3. Комплексная амплитуда определяет начальное положение вектора на комплексной плоскости, поэтому строим вектор, соответствующий комплексной амплитуде (рис.3.2). Его длина, в выбранном масштабе, равна - $\frac{A_m}{M_a} = \frac{120}{40} = 3\ \text{см}$, а угол поворота вектора против часовой стрелки относительно оси абсцисс равен начальной фазе - $\psi = 45^0$.

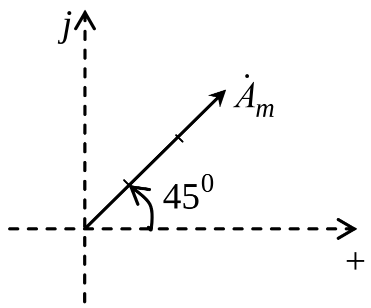


Рис.3.2

Представление синусоидальных функций векторами или комплексными числами нашло широкое применение в электротехнике при расчете цепей переменного тока. На этом основан <u>*символический метод*</u> анализа цепей.

Метод получил такое название, поскольку в нем <u>оригиналы</u> (синусоидальные функции) заменяются своими <u>символами</u> (комплексными числами или векторами).

Идея применить комплексные числа для выражения основных характеристик электрических цепей переменного тока принадлежит американскому учёному Чарлзу Штейнметцу (1865-1923гг.), математику по образованию, основные труды которого посвящены электротехнике, электрическим машинам и аппаратам.

Заметим, что только комплексные числа и вектора, изображающие синусоидальные функции времени, обозначают в электротехнике большими буквами с точкой наверху. Все остальные комплексные величины, которые встречаются при расчетах цепей синусоидального тока, принято обозначать большими буквами без точек.

Обычно при расчетах цепей синусоидального тока вместо комплексных амплитуд берут значения в $\sqrt{2}$ раз меньшие, так называемые *комплексы действующих значений*. Комплекс действующего значения электрической величины обозначается символом $\dot{A}$ и вычисляется по формуле

$$\dot{A} = \frac{\dot{A}_m}{\sqrt{2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \psi} . \tag{3.3}$$

Комплекс действующего значения кратко называют комплексом величины, например комплекс тока, комплекс напряжения и т.д.

Поясним последний термин. Уравнение $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$ позволяет определить мгновенное значение тока, но оно (уравнение) не определяет значение тока за некоторый промежуток времени. Поэтому для суждения о величине переменного тока его приравнивают к величине такого эквивалентного постоянного тока, который, протекая по такому же сопротивлению, что и переменный ток, производит одинаковое с ним тепловое действие. Такая величина тока и называется действующей. Очевидно, что действующее значение тока меньше амплитудного. Как известно, они связаны соотношением:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

Отметим также, что приборы, измеряющие величину тока, дают показания действующего значения.

Пример 3.4. (Переход из системы оригиналов в систему символических изображений.) Для тока, заданного синусоидальной функцией времени $i(t) = 10 \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) A$, записать выражение для комплекса действующего значения тока.

Решение. $i(t) = 10\sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{Im}\left[10 \cdot e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right] = \mathrm{Im}\left[\dot{I}_m \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right]$,

поэтому комплексная функция времени будет $\dot{I}_m \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ и комплексная амплитуда - $\dot{I}_m = 10 \cdot e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$. Запишем выражение для комплекса действующего значения тока $\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Пример 3.5. (Обратный переход от системы изображений в систему оригиналов.) Записать выражение для мгновенного значения напряжения $u(t)$, если комплекс напряжения $\dot{U} = -100 + 100 \cdot j \;\; B$, частота $f = 10^3 \;\; Гц$. В пакете Mathcad построить график функции $u(t)$.

Решение. Находим:

угловую частоту $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 10^3 = 6280 \quad рад/с$;

комплексную амплитуду $\dot{U}_m = \sqrt{2} \cdot \dot{U} = -100 \cdot \sqrt{2} + j \cdot 100 \cdot \sqrt{2}$;

амплитуду $U_m = \sqrt{\left(-100 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(100 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 200 \;\; B$;

угол $tg\psi = \frac{100 \cdot \sqrt{2}}{\left(-100 \cdot \sqrt{2}\right)} = -1$.

Так как вещественная часть комплексной амплитуды отрицательна, а мнимая часть положительна, то вектор $\dot{U}_m$ лежит во второй четверти и, следовательно, $\psi = \frac{3\pi}{4}$. Запишем мгновенное напряжение:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) = 200 \cdot \sin\left(6280 \cdot t + \frac{3\pi}{4}\right) \;\; B.$$

В Mathcad алгоритм решения следующий.

Исходные данные.

$U_k := -100 + 100 \cdot i$ $\qquad f := 10^3$

Задаём угловую частоту и период.

$\omega := 2\pi f \qquad T := \dfrac{1}{f}$

Задаём амплитудное значение напряжения.

$U_m := \sqrt{2} \cdot |U_k|$

Задаём начальную фазу напряжения в градусах.

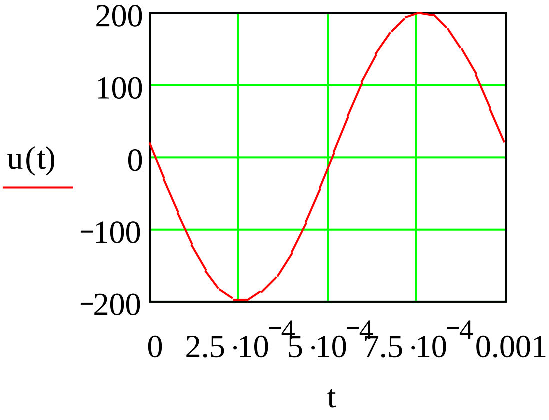
$\psi := \arg(U_k) \cdot \dfrac{180}{\pi}$

Задаём синусоидальную функцию времени напряжения.

$u(t) := U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$

Определяем время как дискретную величину.

$n := 25 \qquad h := \dfrac{T}{n} \qquad t := 0, 0 + h .. T$



Пример 3.6. Для неразветвленной цепи переменного тока, векторная диаграмма которой показана на рис.3.3, выразить комплексы действующих значений напряжений и тока в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной, если известно: $U_1 = 220$ В, $U_2 = 127$ В и $I = 2$ А. Записать синусоидальные функции времени для этих величин.

Решение. Выпишем комплексы действующих значений для напряжений и тока по диаграмме:

$\dot{U}_1 = U_1 \cdot e^{-j \cdot 60^0} = 220 \cdot e^{-j \cdot 60^0} = 220 \cdot \left(\cos 60^0 - j \cdot \sin 60^0\right) = (110 - j \cdot 190{,}5)$ В,

$\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j \cdot 90^0} = 127 \cdot e^{j \cdot 90^0} = (0 + j \cdot 127)$ В;

$\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^0} = 2 \cdot e^{j \cdot 0^0} = (2 + j \cdot 0)$ А.

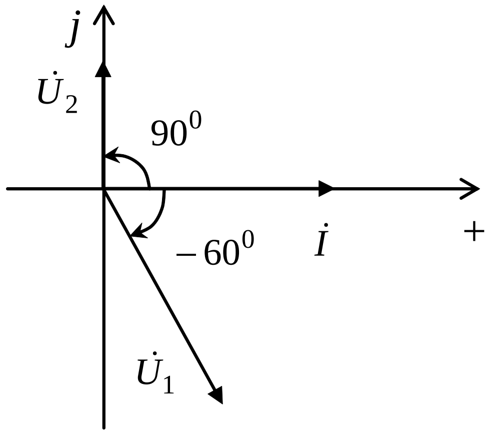


Рис.3.3

Выражения для комплексных амплитуд будут следующие:

$\dot{U}_{m1} = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot e^{-j \cdot 60^0}$;

$\dot{U}_{m2} = \sqrt{2} \cdot 127 \cdot e^{j \cdot 90^0}$;

$\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot e^{j \cdot 0^0}$.

Запишем синусоидальные функции времени:

$u_1(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - 60^0\right)\ B$;

$u_2(t) = 127\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 90^0\right)\ B$;

$i(t) = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 0^0\right)\ A$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Представление синусоидальных функций времени векторами или комплексными числами. Символический метод

1. Для синусоидальной функции времени $a(t) = 800 \cdot \sin\left(157 \cdot t - 55^0\right)$ записать комплексную функцию времени, комплексную амплитуду, выбрать масштаб и начертить вектор, изображающий заданную синусоидальную функцию времени на комплексной плоскости.

2. По заданным комплексным амплитудам $\dot{U}_{km}$ записать напряжение в виде синусоидальной функции $u_k(t) = U_{km} \sin(\omega \cdot t + \psi_k)$ при $\omega = 5000$ рад/с и в пакете Mathcad построить графики функций $u_k(t)$.

а) $\dot{U}_{1m} = 3 + 4j$; в) $\dot{U}_{3m} = 24 - 7j$;

б) $\dot{U}_{2m} = -40 + 40j$;　　　　　г) $\dot{U}_{4m} = 13j$.

3. Две синусоидальные функции изменяются во времени по следующим законам:

а) $a_1(t) = 300 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $a_2(t) = 75 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\omega = 314$ $рад/с$;

б) $a_1(t) = 15 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $a_2(t) = 30 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\omega = 6{,}28 \cdot 10^5$ $рад/с$.

Для каждого случая выбрать свой масштаб и начертить на комплексной плоскости векторы, соответствующие синусоидальным функциям. Найти сдвиг фаз между соответствующей парой синусоидальных функций, определить период и частоту. В пакете Mathcad на одном рисунке для каждого случая построить графики функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

4. Комплексы действующих значений тока и напряжения на некотором участке цепи определяются следующими выражениями: $\dot{I} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}} + \dfrac{5}{\sqrt{2}} j\right) A$ и $\dot{U} = \left(5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}\right) B$. Написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения. Для каждой синусоидальной функции выбрать свой масштаб и начертить векторы на одном рисунке в одной системе координат каждый в своем масштабе, найти сдвиг фаз.

5. По векторной диаграмме (рис.3.4) выразите комплексы действующих значений тока и напряжения в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной, если их действующие значения $I = 2$ А, $U = 127$ В. Запишите выражения для синусоидальных функций времени тока и напряжения.

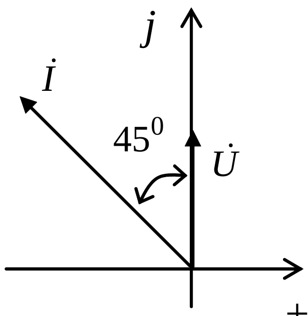


Рис.3.4

Задание на дом.

Требования к решению задач: все диаграммы выполнить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге; в пакете Mathcad сделать необходимые расчёты и, если требуется, построить графики.

1. Для синусоидальной функции времени $a(t)=100\cdot\sin\left(157\cdot t+\frac{9\pi}{40}\right)$ записать комплексную функцию времени, комплексную амплитуду, выбрать масштаб и начертить вектор, изображающий заданную синусоидальную функцию времени на комплексной плоскости. В пакете Mathcad построить график.

2. По заданным комплексным амплитудам $\dot{I}_{km}$ записать ток в виде синусоидальной функции $i_k(t)=I_{km}\sin(\omega\cdot t+\psi_k)$ при $\omega=200$ рад/с и в пакете Mathcad построить графики функций $i_k(t)$:

а) $\dot{I}_{1m}=-3+4j$; в) $\dot{I}_{3m}=-3j$;

б) $\dot{I}_{2m}=80+60j$; г) $\dot{I}_{4m}=2{,}4-3{,}2j$.

3. Две синусоидальные функции изменяются во времени по следующим законам: $a_1(t)=20\cdot\sin\left(\omega\cdot t+25^0\right)$, $a_2(t)=8\cdot\sin\left(\omega\cdot t-35^0\right)$, $\omega=1000$ $рад/с$.

Выбрать масштаб и начертить на комплексной плоскости векторы, соответствующие этим функциям. Найти сдвиг фаз, определить период и частоту. В пакете Mathcad на одном рисунке построить графики функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

4. Мгновенные значения тока и напряжения на некотором участке цепи определяются уравнениями:

$$u(t)=500\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{6}\right)B,\ i(t)=25\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)A,\ \omega=628\ рад/с.$$

Так как эти синусоидальные функции определяют разные физические величины, то и масштабы для них будут разные. Пусть $M_u=100\ В/см$ и $M_i=5\ А/см$. Для каждой заданной синусоидальной функции в выбранном масштабе начертить вектор, изображающий ее на комплексной плоскости. Оба вектора нарисовать на одном рисунке в одной системе координат. Найти сдвиг фаз между соответствующей парой синусоидальных функций, определить период и частоту.

<u>ЛЕКЦИЯ №4.</u> Линейные операции над синусоидальными функциями в комплексной области

Задача сложения или вычитания синусоидальных функций значительно упрощается при решении в комплексной области. В этом случае синусоидальные функции заменяются комплексными амплитудами и представляются в виде векторов комплексной плоскости. Совокупность таких векторов называют *векторной диаграммой*.

Рассмотрим пример сложения синусоидальных величин при помощи векторной диаграммы. Этот способ называется графическим.

Заметим, что *когда складываем или вычитаем синусоидальные функции одинаковой частоты, масштаб выбираем <u>единый</u> для всех заданных функций*.

Вернемся к примеру 2.2. Найдем разность токов при помощи векторной диаграммы. Напомним, что векторы, изображающие синусоидальные функции времени, обозначаются так же, как и комплексные амплитуды.

1. Зададим общий масштаб токов M_i (например $M_i = 50 \ A/см$).

2. Выпишем комплексные амплитуды токов

$i_1(t) = 100\sin\left(314 \cdot t + 30^0\right)$ и $i_2(t) = 120\sin\left(314 \cdot t - 45^0\right)$:

$\dot{I}_{m1} = 100 \cdot e^{j \cdot 30^0}$; $\dot{I}_{m2} = -120 \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)}$.

Так как $i_1(t) - i_2(t) = i_1(t) + (-i_2(t))$, то для $-i_2(t)$ комплексная амплитуда будет

$-\dot{I}_{m2} = -120 \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} = 120 \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} \cdot e^{j \cdot 180^0} = 120 \cdot e^{j \cdot 135^0}$.

3. На комплексной плоскости строим вектора, соответствующие комплексным амплитудам (рис.4.1). Для определения суммарного тока $i_1(t) - i_2(t) = i_1(t) + (-i_2(t))$ производится сложение векторов по правилу многоугольника. Амплитуда суммарного тока $\dot{I}_m$ определяется из многоугольника в выбранном масштабе. Длина вектора $\dot{I}_m$ измеряется линейкой, она равна 2,7

см, поэтому амплитуда суммарного тока будет $\dot{I}_m = 2{,}7 \cdot 50 = 135\ A$. Начальная фаза суммарного тока измеряется транспортиром, она равна $\gamma = 87^0$. В итоге: $i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 135\sin\left(314 \cdot t + 87^0\right)\ A$.

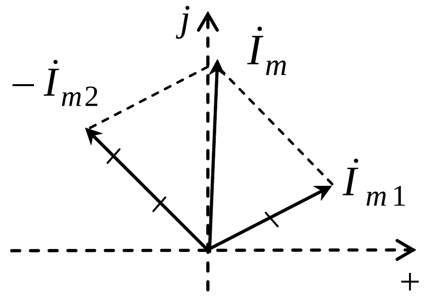


Рис.4.1

Пример 4.1. Пусть заданы мгновенные значения трех токов: $i_1(t) = 3\sin 314t\ A$; $i_2(t) = 2\sin\left(314t + 45^0\right)\ A$; $i_3(t) = 4\sin\left(314t - 45^0\right)\ A$.

Построить векторную диаграмму: $i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$.

Решение.

1. Определим общий масштаб токов $M_i = 1\ A/см$.

2. Для заданных токов выпишем комплексные амплитуды, так как они определяют начальные положения векторов на комплексной плоскости:

$$\dot{I}_{m1} = 3 \cdot e^{j \cdot 0^0};\ \dot{I}_{m2} = 2 \cdot e^{j \cdot 45^0};\ \dot{I}_{m3} = 4 \cdot e^{j \cdot (-45)^0}.$$

3. На комплексной плоскости строим вектора (рис.4.2), соответствующие комплексным амплитудам $\dot{I}_{m1}$, $\dot{I}_{m2}$, $\dot{I}_{m3}$.

4. Для нахождения суммарного тока производится сложение векторов по правилу многоугольника. Амплитуда суммарного тока определяется из многоугольника в выбранном масштабе (длина вектора $\dot{I}_m$ равна 7,5 см, поэтому $I_m = 7{,}5\ A$), а начальная фаза его измеряется транспортиром ($\gamma = -11^0$). В результате получим:

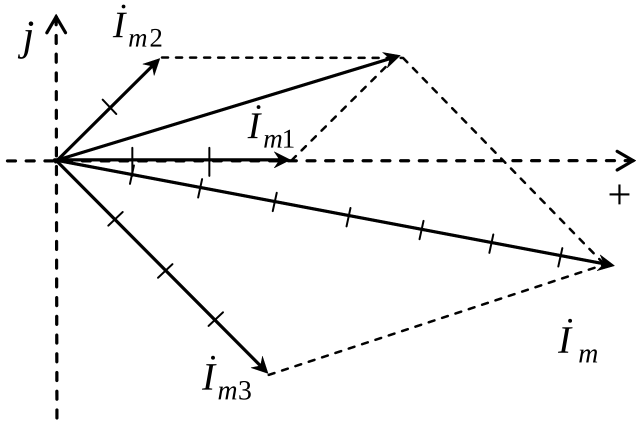


Рис.4.2

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 7{,}5\sin\left(314 \cdot t - 11^0\right)\ A.$$

Примечание. Складывать можно только вектора, соответствующие одинаковым физическим величинам. Операция сложения не применяется к векторам разных физических величин, например, к вектору тока и вектору напряжения. Эти вектора можно только изображать на одной комплексной плоскости, каждый в своем масштабе, и вычислять сдвиг фаз.

Применение комплексной формы записи синусоидальных функций имеет ряд преимуществ также для операций дифференцирования и интегрирования. Действительно, так как функции $a(t) = A_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$ в системе изображений соответствует комплекс $A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi)} = \dot{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$, то, дифференцируя и интегрируя комплексную функцию времени, получим следующие формулы:

$$\frac{d\left[A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)}\right]}{dt} = \frac{d\left[A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right]}{dt} = A_m e^{j \cdot \psi} \frac{d\left[e^{j \cdot \omega \cdot t}\right]}{dt} =$$

$$= A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \omega \cdot j \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \omega \cdot j \cdot \left[A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)}\right];$$

$$\int A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)} dt = \int A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} dt = A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot \int e^{j \cdot \omega \cdot t} dt =$$

$$= A_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega \cdot t}}{\omega \cdot j} = \frac{1}{\omega \cdot j} \cdot \left[A_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)}\right].$$

Эти вычисления показывают, что операции дифференцирования и интегрирования для синусоидальных функций можно заменить, соответственно, операциями умножения и деления на $\omega \cdot j = \omega \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$, т.е. поворотом на $\pm 90^0$.

Рассмотрим *решение примеров 2.3, 2.4 и 2.5* в комплексной области. Комплексное мгновенное значение тока $I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)} = \dot{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$.

- Запишем комплексное мгновенное значение напряжения <u>на активном сопротивлении</u> $R \cdot I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi)} = R \cdot I_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \dot{U}_R \cdot e^{j \cdot \cdot \omega \cdot t}$,

  где $\dot{U}_R = R \cdot I_m \cdot e^{j \cdot \psi}$ - комплексная амплитуда напряжения на активном сопротивлении.

- Для комплексного мгновенного значения напряжения <u>на индуктивности</u> получим следующее выражение:

$$L\cdot\frac{d\left[I_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\psi)}\right]}{dt}=\omega\cdot j\cdot\left[L\cdot I_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\psi)}\right]=\dot{U}_L\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t},$$

где $\dot{U}_L = j\cdot\omega\cdot L\cdot I_m\cdot e^{j\cdot\psi}$ - комплексная амплитуда напряжения на индуктивном сопротивлении. Мы видим, что дифференцирование привело к умножению на поворотный множитель $\omega\cdot j$;

- Комплексное мгновенное значение напряжения на емкости:

$$\frac{1}{C}\cdot\int I_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\psi)}dt=\frac{1}{\omega\cdot j}\cdot\left[\frac{1}{C}\cdot I_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\psi)}\right]=\dot{U}_C\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t},$$

где $\dot{U}_C=\dfrac{I_m}{j\cdot\omega\cdot C}\cdot e^{j\cdot\psi}$ - комплексная амплитуда напряжения на емкости. В этой формуле интегрирование привело к делению на поворотный множитель $\omega\cdot j$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Линейные операции над синусоидальными функциями в комплексной области.

1. Найти сумму и разность двух синусоидальных функций аналитически (формулы (2.5) и (2.6)) и при помощи векторной диаграммы:

а) $a_1(t)=100\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\dfrac{\pi}{3}\right)$ и $a_2(t)=150\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\dfrac{\pi}{12}\right)$;

б) $a_1(t)=310\cdot\sin(314\cdot t)$ и $a_2(t)=180\cdot\sin\left(314\cdot t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Уравнение напряжений в контуре некоторой электрической цепи имеет вид $u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)$; $u_1(t)=5\cdot\sin(\omega\cdot t)$, $u_2(t)=10\cdot\sin\left(\omega\cdot t+30^0\right)$, $u_3(t)=10\cdot\sin\left(\omega\cdot t-60^0\right)$. Получить выражение $u(t)$ в виде одной синусоидальной функции времени, построить векторную диаграмму напряжений на комплексной плоскости.

Задание на дом.

Требования к решению задач: все векторные диаграммы выполнить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге; необходимые расчёты сделать в пакете Mathcad.

3. Найти сумму и разность двух синусоидальных функций аналитически (формулы (2.5) и (2.6)) и при помощи векторной диаграммы:

$a_1(t) = 2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 90^0\right)$ и $a_2(t) = 4 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right)$.

4. Уравнение равновесия токов в узле некоторой электрической цепи имеет вид $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, где $i_1(t) = 3\sin\left(1000 \cdot t + 30^0\right)$ и $i_2(t) = 4\sin\left(1000 \cdot t + 120^0\right)$. При помощи векторной диаграммы найти выражение для $i(t)$. В пакете Mathcad на одном рисунке построить графики функций $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i(t)$.

<u>ЛЕКЦИЯ №5.</u> Ограничения символического метода. Понятие комплексной мощности, комплексного сопротивления и комплексной проводимости в системе символических изображений

Символический метод не применим, если нужно подвергнуть токи или напряжения нелинейным алгебраическим операциям, таким как, например, умножение и деление. Действительно, легко видеть, что при таких операциях возникают круговые частоты, отличные от ω. Это обрекает на неудачу векторные построения, а, следовательно, и комплексное представление, которое является его отображением.

Рассмотрим это на примере умножения. Пусть

$$a_1(t) = 10\sin\left(\omega \cdot t + 30^0\right) = \mathrm{Im}\left[10 \cdot e^{j \cdot \left(30^0 + \omega \cdot t\right)}\right],$$

$$a_2(t) = 12\sin\left(\omega \cdot t - 45^0\right) = \mathrm{Im}\left[12 \cdot e^{j \cdot \left(\omega \cdot t - 45^0\right)}\right].$$

Если непосредственно умножить $a_1(t)$ на $a_2(t)$, то получим

$$a_1(t) \cdot a_2(t) = \frac{120}{2}\left[cos\left(75^0\right) - \cos\left(2\omega \cdot t - 15^0\right)\right].$$

Умножение комплексных функций времени соответствующих $a_1(t)$ и $a_2(t)$, дает $10 \cdot e^{j\cdot(30^0+\omega\cdot t)} 12 \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t-45^0)} = 120 e^{j\cdot(30^0+\omega\cdot t+\omega\cdot t-45^0)} = 120 e^{j\cdot(2\omega\cdot t-15^0)}$. Мнимая часть этого выражения равна $120 \cdot \sin(2\omega \cdot t - 15^0)$. Результаты, как видим, получились совершенно различные.

Известно, что _мгновенная мощность_ в цепи переменного тока определяется произведением синусоидальных функций напряжения и тока: $p = i(t) \cdot u(t)$. Возникает вопрос: «Можно ли выразить эту нелинейную операцию, пользуясь комплексными числами?»

Так как в этом случае комплексное исчисление нельзя использовать напрямую, для определения операции умножения был придуман искусственный прием, который мы разберем далее.

Вычислим мгновенную мощность $p = i(t) \cdot u(t)$ для $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ и $i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$.

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi) \cdot U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi) =$$

$$= \frac{I_m U_m}{2} 2\sin(\omega \cdot t + \psi)\sin(\omega \cdot t + \varphi) =$$

$$= \frac{I_m U_m}{2} \left[\cos(\varphi - \psi) - \cos(2\omega \cdot t + \varphi + \psi)\right] =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cos(\varphi - \psi) - \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cos(2\omega \cdot t + \varphi + \psi) =$$

$$= IU\cos(\varphi - \psi) - IU\cos(2\omega \cdot t + 2\varphi - (\varphi - \psi)) = IU\cos(\varphi - \psi) -$$

$$- IU\cos(\varphi - \psi)\cos(2\omega \cdot t + 2\varphi) - IU\sin(\varphi - \psi)\sin(2\omega \cdot t + 2\varphi) =$$

$$= IU\cos(\varphi - \psi)[1 - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)] - IU\sin(\varphi - \psi)\sin(2\omega \cdot t + 2\varphi).$$

Итак, $p(t) = IU\cos\gamma \cdot [1 - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)] - IU\sin\gamma \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi)$,

где $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ - действующие значения напряжения и тока, а $\gamma = \varphi - \psi$ - сдвиг фаз между напряжением и током.

В результате проделанных преобразований мгновенную мощность можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$p(t) = p_r(t) + p_q(t),$$

где

$$p_r(t) = IU\cos\gamma \cdot [1 - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)] \text{ -}$$

активная составляющая мгновенной мощности;

$$p_q(t) = -IU\sin\gamma \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi) \text{ -}$$

реактивная составляющая мгновенной мощности.

Среднее значение мгновенной мощности за период можно определить, вычислив интеграл:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[p_r(t) + p_q(t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_0^T p_r(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T p_q(t)dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{T}\int_0^T p_r(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [IU\cos\gamma \cdot [1 - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)]]dt =$$

$$= IU\cos\gamma \cdot \frac{1}{T}\int_0^T [1 - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)]dt =$$

$$= IU\cos\gamma \cdot \frac{1}{T}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi)dt\right] = IU\cos\gamma \cdot \frac{1}{T}[T - 0] = IU\cos\gamma,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T p_q(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [-IU\sin\gamma \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi)]dt =$$

$$= -IU\sin\gamma \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi)dt = -IU\sin\gamma \cdot \frac{1}{T} \cdot 0 = 0,$$

получим

$$P_{cp} = IU\cos\gamma.$$

В приведенном выражении среднее значение активной составляющей мощности равно среднему значению мгновенной мощности $P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T p_r(t)dt = IU\cos\gamma$, а среднее значение реактивной составляющей равно нулю $\frac{1}{T}\int_0^T p_q(t)dt = 0$.

Среднее значение мгновенной мощности за период называют *активной (потребляемой) мощностью* и измеряют в ваттах (*Вт*):

$$P = UI\cos\gamma .$$

Амплитудное значение реактивной составляющей мгновенной мощности называют *реактивной мощностью* и измеряют в вольт-амперах реактивных (BAp):

$$Q = UI\sin\gamma .$$

Примечание. Комплексное исчисление оказывается весьма полезным в тех случаях, когда требуется определить активную и реактивную мощности в цепи переменного тока.

При анализе цепей символическим методом выражение мощности в комплексной форме определяется как произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока

$$\tilde{S} = \dot{U}\cdot\dot{I}^* = \dot{U}e^{j\varphi}\cdot\dot{I}e^{-j\psi} = \dot{U}\dot{I}e^{j(\varphi-\psi)} = \dot{U}\dot{I}e^{j\gamma} = \dot{U}\dot{I}\cos\gamma + j\cdot\dot{U}\dot{I}\sin\gamma .$$

Напомним, что в этой формуле $\gamma = \varphi - \psi$ - угол сдвига фаз между напряжением и током.

Таким образом, активная мощность $P = \mathrm{Re}\,\tilde{S} = \mathrm{Re}\,\dot{U}\dot{I}^*$ есть действительная часть, а реактивная мощность $Q = \mathrm{Im}\,\tilde{S} = \mathrm{Im}\,\dot{U}\dot{I}^*$ - мнимая часть *комплексной мощности* $\tilde{S}$, т.е. $\tilde{S} = P \pm j\cdot Q$.

Полной мощностью называют модуль комплексной мощности и измеряют в вольт-амперах $(B\cdot A)$:

$$S = \left|\tilde{S}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI .$$

Пример 5.1. Определить активную, реактивную и полную мощности, если $\dot{U} = 100\ B$ и $\dot{I} = 17{,}2\cdot e^{-j\cdot 31^o}\ A$.

Решение. Сопряженный комплекс тока $\dot{I}^* = 17{,}2 \cdot e^{j \cdot 31^o}$. Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 100 \cdot 17{,}2 e^{j \cdot 31^o} = 1720 \cdot e^{j \cdot 31^o} = 1720 \cos 31^o + j \cdot 1720 \sin 31^o$$

$$P = \operatorname{Re} \tilde{S} = 1720 \cos 31^o \approx 1475 \text{ Вт;}$$

$$Q = \operatorname{Im} \tilde{S} = 1720 \sin 31^o \approx 886 \text{ ВАр;}$$

$$S = \left| \tilde{S} \right| = 1720 \text{ ВА.}$$

Программа расчёта в пакете Mathcad.

Начальная фаза комплекса тока в градусах.

$\psi := 31$

Задание начальной фазы комплекса тока в радианах.

$\psi_1 := \psi \cdot \frac{\pi}{180}$

Задание комплексов действующих значений напряжения и тока.

$U_k := 100$ $\quad\quad\quad$ $I_k := 17.2 \cdot e^{-\psi_1 \cdot i}$

Определение сопряжённого комплекса тока.

$Is_k := \overline{I_k}$

Определение комплексной мощности.

$S_k := U_k \cdot Is_k$

Вычисление активной мощности

$P := \operatorname{Re}(S_k)$ $\quad\quad\quad$ $P = 1.474 \times 10^3$

Вычисление реактивной мощности

$Q := \operatorname{Im}(S_k)$ $\quad\quad\quad$ $Q = 885.865$

Вычисление полной мощности

$S := |S_k|$ $\quad\quad\quad$ $S = 1.72 \times 10^3$

Другим важным случаем нелинейной операции является введение комплексных изображений для сопротивлений, которое позволит нам ниже указать способ написания уравнений Кирхгофа прямо для символических изображений.

Пусть в цепи напряжение и ток меняются по синусоидальному закону $u = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ и $i = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$.

Запишем отношения их комплексных функций времени и сократим получившуюся дробь на временной сомножитель $e^{j \cdot \omega \cdot t}$

$$\frac{\dot{U}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}}{\dot{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\sqrt{2} \cdot \dot{U}}{\sqrt{2} \cdot \dot{I}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi}}{I \cdot e^{j\psi}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi - \psi)} = |Z| \cdot e^{j \cdot \gamma} = Z .$$

Отметим, что в этой формуле $\gamma = \varphi - \psi$ - угол сдвига фаз между напряжением и током.

Коэффициент пропорциональности Z между комплексными функциями времени напряжения и тока является комплексным числом, не зависящим от времени, поэтому точка над ним не ставится. Он имеет размерность сопротивления (измеряется в Омах (*Ом*)) и называется *комплексным сопротивлением*.

Следует особо подчеркнуть, что определение комплексных изображений для сопротивлений включает в себя нелинейную операцию $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$, поэтому соотношение между сопротивлением и его комплексным изображением имеет другой характер, чем в случаях тока или напряжения. При этом, комплексное изображение сопротивления отличается от его модуля (полного сопротивления) множителем $e^{j \cdot \gamma}$, учитывающим сдвиг фаз между током и напряжением.

Выражение

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \tag{5.1}$$

представляет собой *закон Ома в комплексной форме*.

Пример 5.2. Вычислить комплексное сопротивление Z, если $\dot{U} = (80 + j \cdot 60)\ B$, $\dot{I} = (24 - j \cdot 7)\ A$.

Решение. Запишем комплексные действующие значения напряжения и тока в показательной форме:

$$\dot{U} = (80 + j \cdot 60) = \sqrt{80^2 + 60^2} \cdot e^{j \cdot arctg\frac{60}{80}} = 100 \cdot e^{j \cdot 36{,}87^0}\ B;$$

$$\dot{I} = (24 - j \cdot 7) = \sqrt{24^2 + (-7)^2} \cdot e^{j \cdot arctg\left(-\frac{7}{24}\right)} = 25 \cdot e^{-j \cdot 16{,}26^0}\ A.$$

Вычислим комплексное сопротивление по формуле (14):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 36{,}87^0}}{25 \cdot e^{-j \cdot 16{,}26^0}} = 4 \cdot e^{j \cdot 53{,}13^0} = 2{,}4 + j \cdot 3{,}2\ Ом.$$

Найдем, чему равны комплексные сопротивления для простых случаев активного, чисто индуктивного и чисто емкостного сопротивлений, если комплексная функция времени тока $I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi)} = I_m \cdot e^{j \cdot \psi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \dot{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$. Для этого воспользуемся формулами для комплексных амплитуд напряжений, полученных в примерах 2.3, 2.4 и 2.5:

$$\dot{U}_R = R \cdot I_m \cdot e^{j \psi} = R \cdot \dot{I}_m;$$

$$\dot{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j \psi} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m;$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot I_m \cdot e^{j \psi} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \dot{I}_m.$$

Согласно сформулированному выше определению, из этих соотношений непосредственно следуют выражения для комплексных сопротивлений:

$Z_R = \dfrac{R \cdot \dot{I}_m}{\dot{I}_m} = R = R \cdot e^{j \cdot 0^o}$ - активное сопротивление;

$Z_L = \dfrac{j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m}{\dot{I}_m} = j\omega L = jX_L = X_L \cdot e^{j \cdot 90^o}$ - чисто индуктивное сопротивление;

$Z_C = \dfrac{\dot{I}_m}{j \cdot \omega \cdot C \cdot \dot{I}_m} = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{j} X_C = -jX_C = X_C \cdot e^{-j \cdot 90^o}$ - чисто емкостное сопротивление.

Комплексное сопротивление Z вводится как множитель, устанавливающий связь между двумя изображениями гармонических функций. Его можно рассматривать как оператор, который отображает вектор тока в вектор напряжения. При этом он не только поворачивает вектор тока, но и меняет его размерность и физический смысл. Это хорошо демонстрируют векторные диаграммы токов и напряжений, построенные в примере 5.3. Обратим внимание на то, что вектора $\dot{U}$ и $\dot{I}$ строятся на комплексной плоскости каждый в своем масштабе, т.к. характеризуют разные физические величины.

Пример 5.3. Построить векторные диаграммы пары $\dot{U}$ и $\dot{I}$ для активного, чисто индуктивного и чисто емкостного сопротивлений, при заданном векторе тока $\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^0}$ A.

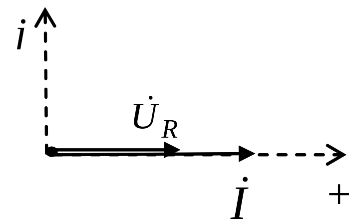


Рис.5.1

1) Для участка цепи с <u>активным сопротивлением</u> $Z_R = R = R \cdot e^{j \cdot 0^0}$ напряжение будет $\dot{U}_R = Z_R \cdot \dot{I} = R \cdot \dot{I} = R \cdot I \cdot e^{j \cdot 0^0}$ и .векторная диаграмма пары $\dot{U}$ и $\dot{I}$ показана на рис.5.1.

На векторной диаграмме видно, что активное напряжение совпадает по фазе с током, т.е. поворот осуществляется на угол $\gamma = 0^o$

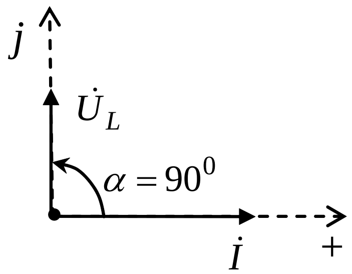


Рис.5.2

2) Для участка цепи с <u>индуктивным сопротивлением</u> $Z_L = \omega \cdot L \cdot j = X_L \cdot j = X_L \cdot e^{j \cdot 90^0}$ напряжение будет равно

$$\dot{U}_L = Z_R \cdot \dot{I} = X_L \cdot e^{j \cdot 90^0} \cdot I \cdot e^{j \cdot 0^0} = X_L \cdot I \cdot e^{j \cdot 90^0}$$

Векторная диаграмма пары и $\dot{U}$, $\dot{I}$ изображена на рис.5.2, индуктивное напряжение опережает ток на угол $\gamma = 90^0$.

3) Для цепи с <u>емкостным сопротивлением</u> $Z_C = X_C \cdot e^{j \cdot (-90)^0}$ напряжение

равно $\dot{U}_C = Z_C \cdot \dot{I} = X_C \cdot e^{-j\cdot 90^0} \cdot I \cdot e^{j\cdot 0^0} = X_C \cdot I \cdot e^{-j\cdot 90^0}$.

На векторной диаграмме (рис.5.3) емкостное напряжение отстает от тока на угол $\gamma = -90^0$.

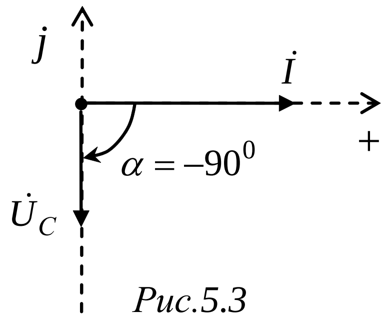


Рис.5.3

Аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм, чтобы иметь возможность избежать ошибок и качественно контролировать эти расчеты.

Комплексное сопротивление можно представить в виде

$$Z = |Z| \cdot e^{j\cdot\gamma} = |Z| \cdot \cos\gamma + j \cdot |Z| \cdot \sin\gamma = R \pm j \cdot X\,, \tag{5.2}$$

где $R \geq 0$ и $X \geq 0$.

Модуль комплексного сопротивления $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ называют *полным сопротивлением*. Вещественную часть комплексного сопротивления R называют *активным сопротивлением*, а коэффициент X при мнимой единице - *реактивным сопротивлением.*

Величину, обратную комплексному сопротивлению Z, называют *комплексной проводимостью*:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z| \cdot e^{j\cdot\gamma}} = |Y| e^{-j\cdot\gamma} = g \mp jb\,, \tag{5.3}$$

где $g \geq 0$ и $b \geq 0$. Единицей проводимости является сименс (*Сим*), при этом $1Сим = \dfrac{1}{1Ом}$.

Модуль комплексной проводимости $|Y| = \sqrt{g^2 + b^2}$ называют *полной проводимостью.* Действительную часть g комплексной проводимости называют *активной проводимостью*, а коэффициент b при мнимой единице - *реактивной проводимостью.*

Пример 5.4. Комплексы действующих значений тока и напряжения на некотором участке цепи определяются следующими выражениями:

$\dot{U} = 10 \cdot e^{j \cdot 50^0}$ $В$, $\dot{I} = 2 \cdot e^{j \cdot 20^0}$ $А$. Определить комплексные сопротивление, проводимость и их активные и реактивные составляющие. Найти полное сопротивление и проводимость.

Решение.

$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{10 \cdot e^{j \cdot 50^0}}{2 \cdot e^{j \cdot 20^0}} = 5 \cdot e^{j \cdot \left(50^0 - 20^0\right)} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^0} = \frac{5\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{5}{2}$ *Ом*, следовательно,

$R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ *Ом* и $X = \frac{5}{2}$ *Ом*. Полное сопротивление $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = 5$ *Ом*.

Так как $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{5 \cdot e^{j \cdot 30^0}} = \frac{1}{5} \cdot e^{-j \cdot 30^0} = \frac{\sqrt{3}}{10} - j \cdot \frac{1}{10}$ *См*, то

$g = \frac{\sqrt{3}}{10}$ *См* и $b = \frac{1}{10}$ *См*. Полная проводимость $|Y| = \sqrt{g^2 + b^2} = 0{,}2$ *См*.

Программа расчёта в пакете Mathcad.

Начальные фазы комплексов напряжения и тока в градусах.

$\alpha := 50 \qquad \beta := 20$

Задание начальных фаз комплексов напряжения и тока в радианах.

$\alpha_1 := \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \beta_1 := \beta \cdot \frac{\pi}{180}$

Задание комплексов напряжения и тока.

$U_k := 10 \cdot e^{\alpha_1 \cdot i} \qquad I_k := 2 \cdot e^{\beta_1 \cdot i}$

Вычисление комплексного сопротивления.

$Z_k := \frac{U_k}{I_k} \qquad Z_k = 4.33 + 2.5i$

Вычисление комплексной проводимости.

$Y_k := \frac{1}{Z_k} \qquad Y_k = 0.173 - 0.1i$

Активное сопротивление.

$R := \mathrm{Re}(Z_k) \qquad R = 4.33$

Активная проводимость.

$G := \mathrm{Re}(Y_k) \qquad G = 0.173$

Реактивное сопротивление.

$X := |\mathrm{Im}(Z_k)| \qquad X = 2.5$

Реактивная проводимость.

$B := |\mathrm{Im}(Y_k)| \qquad B = 0.1$

Полное сопротивление.

$Z := |Z_k| \qquad Z = 5$

Полная проводимость

$Y := |Y_k| \qquad Y = 0.2$

<u>*Примечание.*</u> Необходимо запомнить, что в формулах для комплексного сопротивления $Z = |Z| \cdot e^{j \cdot \gamma}$, комплексной проводимости $Y = |Y| e^{-j \cdot \gamma}$ и комплексной мощности $\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \dot{U}\dot{I}e^{j\gamma}$ фигурирует один и тот же угол γ, который является углом сдвига фаз между напряжением и током.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Вычисление комплексной мощности, комплексного сопротивления и комплексной проводимости в системе символических изображений.

1. Комплексы действующих значений тока и напряжения на некотором участке цепи определяются следующими выражениями:

а) $\dot{U} = -40 + 40j\ B,\quad \dot{I} = 2 + 4j\ A;$

б) $\dot{U} = -100 \cdot e^{-j \cdot 30^0}\ B,\quad \dot{I} = 7 + 24j\ A.$

Написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения. Найти комплексное сопротивление и проводимость, вычислить их активные и реактивные составляющие. Определить активную, реактивную и полную мощности. Построить векторные диаграммы тока и напряжения.

2. Комплексное сопротивление участка цепи равно $Z = (10 - j \cdot 10)$ *Ом*. Мгновенное значение напряжения $i(t)$ на зажимах всего участка цепи $u(t) = 100 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right)$ *В*. Определить мгновенное значение тока, а также активную, реактивную и полную мощности. Построить векторную диаграмму напряжения и тока. В пакете Mathcad построить график $i(t)$.

3. Комплексная мощность равна $\tilde{S} = 3000 + j \cdot 4000$. Определить угол сдвига фаз между током и напряжением.

4. При заданном векторе тока $\dot{I} = 2 \cdot e^{j45^0}$ *А*, построить векторные диаграммы пары $\dot{U}$ и $\dot{I}$ для различных сопротивлений:

1) $Z = 3$ *Ом*; 2) $Z = 3 + j$ *Ом*; 3) $Z = 4 - 2j$ *Ом*.

Задание на дом.

Требования к решению задач: 1) составить алгоритм решения задачи; 2)написать программу расчёта в пакете Mathcad; 3) все необходимые диаграммы построить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге.

1. Комплексы действующих значений тока и напряжения на некотором участке цепи определяются следующими выражениями:

а) $\dot{U} = 20 - 20j$ *В*, $\dot{I} = 5 + 5j$ *А*;

б) $\dot{U} = 120 \cdot e^{j \cdot 60^0}$ *В*, $\dot{I} = 6 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$ *А*.

Найти комплексное сопротивление и проводимость, вычислить их активные и реактивные составляющие. Определить активную, реактивную и полную мощности. Написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения. В пакете Mathcad построить график напряжения.

2. Мгновенные значения напряжения и тока на входе пассивного двухполюсника, соответственно, равны: $u(t) = 100 \cdot \sin(314 \cdot t)$ *В*,

$i(t)=0{,}2\cdot\sin\left(314\cdot t+53^0\right)A$. Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость двухполюсника. Вычислить полную мощность.

3. Пусть $\dot{I}=I\cdot e^{j\cdot\varphi}\ A$ и $Z=3+2j\ Ом$, построить векторные диаграммы напряжений и токов, если угол, определяющий положение вектора тока на плоскости, имеет значения: 1) $\varphi=30^0$; 2) $\varphi=120^0$; 3) $\varphi=-60^0$; $\varphi=-135^0$.

ЛЕКЦИЯ №6. Правило вычисления полного комплексного сопротивления при последовательном и параллельном соединении

Из свойств комплексного сопротивления Z вытекает, что символическое изображение сопротивления сложной цепи можно получить из изображений сопротивлений отдельных ветвей по обычным формулам для последовательного и параллельного соединений, хотя формулы и содержат нелинейные операции умножения и деления.

Рассмотрим цепь (рис.6.1), состоящую из последовательно соединенных комплексных сопротивлений $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

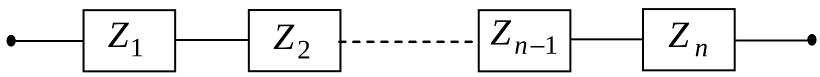


Рис.6.1

Если по цепи течет комплексный ток $\dot{I}$, то комплексное напряжение на каждом последовательно включенном участке равно $\dot{I}Z_1, \dot{I}Z_2, \ldots, \dot{I}Z_n$. Напряжение на зажимах всей цепи представляет собой сумму напряжений на концах каждого участка цепи:

$$\dot{U}=\dot{I}Z_1+\dot{I}Z_2+\ldots+\dot{I}Z_n=\dot{I}\cdot\left(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n\right)=\dot{I}\cdot Z.$$

Следовательно, полное комплексное сопротивление всей цепи представляет собой сумму полных комплексных сопротивлений отдельных участков цепи:

$$Z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n. \qquad (6.1)$$

Рассмотрим цепь (рис.6.2), состоящую из параллельно соединенных комплексных сопротивлений Z_1 , Z_2 , ..., Z_n. В случае параллельного соединения все участки цепи присоединяются к одной паре узлов, т.е. находятся под действием одного и того же напряжения, поэтому имеем

$$\dot{U} = \dot{I}_1 Z_1 = \dot{I}_2 Z_2 = ... = \dot{I}_n Z_n.$$

Полный ток $\dot{I}$ представляет собой сумму токов

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1}, \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2}, ..., \dot{I}_n = \frac{\dot{U}}{Z_n},$$

т.е. $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + ... + \dot{I}_n = \dfrac{\dot{U}}{Z_1} + \dfrac{\dot{U}}{Z_2} + ... + \dfrac{\dot{U}}{Z_n} = \dot{U}\left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + ... + \dfrac{1}{Z_n}\right).$

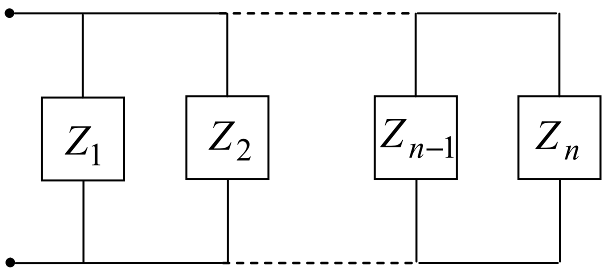


Рис.6.2

Таким образом, обратная величина общего комплексного сопротивления Z при параллельном соединении равна сумме обратных величин сопротивлений на отдельных участках цепи:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_n} \tag{6.2}$$

Так как величина, обратная комплексному сопротивлению Z, это комплексная проводимость $Y = \dfrac{1}{Z}$, то последнее равенство можно записать следующим образом:

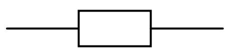
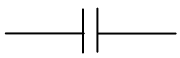
$$Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n. \tag{6.3}$$

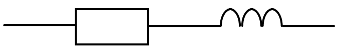
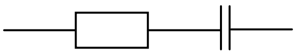
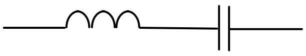
Общая проводимость цепи при параллельном соединении определяется суммой проводимостей на отдельных участках цепи.

Из выражений, полученных для активного $Z_R = R$, чисто индуктивного $Z_L = j\omega L$ и чисто емкостного $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ сопротивлений, можно сформулировать <u>*правило вычисления комплексного сопротивления Z*</u> участка электрической цепи, не содержащего электродвижущих сил и включающего в себя такие объекты, как сопротивление *R*, индуктивность *L* и емкость *C*:

1) каждое омическое сопротивление *R* (в Омах) остается без изменения;
2) каждую ёмкость *C* (в фарадах) нужно умножить на $\omega \cdot j$ и рассматривать $\dfrac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ как сопротивление;
3) каждую индуктивность *L* (в генри) нужно умножить на $\omega \cdot j$ и рассматривать $j \cdot \omega \cdot L$ как сопротивление;
4) комплексное сопротивление участка цепи получится, если сложить все получившиеся сопротивления по правилам сложения сопротивлений (формулы (6.1) или (6.2)).

Используя вышеизложенное правило, составим таблицу, характеризующую комплексные сопротивления для различных участков цепи.

Характер цепи	Комплексное сопротивление
1) *цепь с активным сопротивлением*  R	$Z_R = R = R \cdot e^{j \cdot 0^0}$, где $\lvert Z_R \rvert = R$. Сопротивление R называют <u>активным</u> сопротивлением.
2) *цепь с емкостным сопротивлением*  $-jX_C$	$Z_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega \cdot j} = -j \cdot \dfrac{1}{C \cdot \omega} = -j \cdot X_C =$ $= X_C \cdot e^{j \cdot (-90)^0}$, где $\lvert Z_C \rvert = X_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$. Сопротивление $X_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$ называют <u>емкостным</u> сопротивлением.
3) *цепь с индуктивным сопротивлением*	$Z_L = \omega \cdot L \cdot j = X_L \cdot j = X_L \cdot e^{j \cdot 90^0}$,

 jX_L	где $\lvert Z_L \rvert = X_L = L \cdot \omega$. Сопротивление $X_L = L \cdot \omega$ называют <u>индуктивным</u> сопротивлением.
4) *цепь с активно-индуктивным сопротивлением*  R jX_L	$Z_{RL} = R + X_L \cdot j =$ $= \sqrt{R^2 + X_L^2} \cdot e^{j \cdot arctg \frac{X_L}{R}} == \lvert Z \rvert e^{j\gamma}$, где $0^0 \le \lvert\gamma\rvert \le 90^0$. Сопротивление Z_{RL} называют <u>активно-индуктивным.</u>
5) *цепь с активно-емкостным сопротивлением*  R $-jX_C$	$Z_{RC} = R - X_C \cdot j =$ $= \sqrt{R^2 + X_C^2} \cdot e^{-j \cdot arctg \frac{X_C}{R}} = \lvert Z \rvert e^{-j\gamma}$, где $0^0 \le \lvert\gamma\rvert \le 90^0$. Сопротивление Z_{RC} называют <u>активно-емкостным.</u>
6) *цепь со смешанным реактивным сопротивлением*  jX_L $-jX_C$	$Z_{CL} = X_L \cdot j - X_C \cdot j = (X_L - X_C) \cdot j =$ $= 0 \pm X \cdot j = X \cdot e^{\pm j \cdot 90^0}$. Сопротивление Z_{CL} называют <u>смешанным реактивным</u>. Знак угла, в этом случае, определяется характером сопротивления, модуль которого больше.

Поскольку в <u>активно-реактивных</u> сопротивлениях активное сопротивление R всегда положительная величина, то $0^0 \le \lvert\gamma\rvert \le 90^0$.

Пример 6.1. Построить векторные диаграммы пары $\dot{U}$ и $\dot{I}$ для активно-индуктивного и активно емкостного сопротивлений при заданном векторе тока $\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^0}$ A. На комплексной плоскости $\dot{U}$ и $\dot{I}$ строятся каждый в своем масштабе.

Решение.

1) Для участка с активно-индуктивным сопротивлением $Z_{RL} = R + X_L \cdot j$ имеем

$\dot{U}_{RL} = \dot{I} \cdot Z_{RL} = \dot{I} \cdot (R + j \cdot X_L) =$

$= \dot{I} \cdot R + \dot{I} \cdot X_L \cdot e^{j \cdot 90^0} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{I} \cdot |Z| \cdot e^{j \cdot \gamma}$. Векторная диаграмма на рис.6.3 показывает, что напряжение, приложенное к реальной катушке, опережает по фазе ток на угол γ.

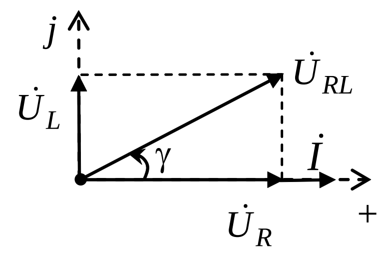


Рис.6.3

2) Для участка с активно-емкостным сопротивлением $Z_{RC} = R - X_C \cdot j$ имеем

$\dot{U}_{RC} = \dot{I} \cdot Z_{RC} = \dot{I} \cdot (R - j \cdot X_C) = \dot{I} \cdot R +$

$+ \dot{I} \cdot X_C \cdot e^{-j \cdot 90^0} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{I} \cdot |Z| \cdot e^{-j \cdot \gamma}$.

На векторной диаграмме рис.6.4 вектор напряжения цепи с активно-емкостным сопротивлением отстает по фазе от вектора тока на угол γ.

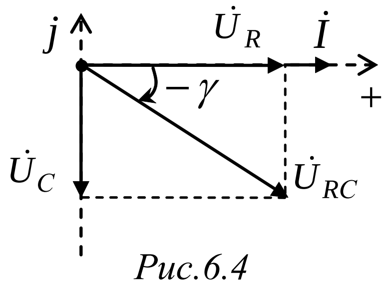


Рис.6.4

Пример 6.2. Напряжение и ток в приемнике заданы гармоническими функциями времени: $u = 200\sin(\omega \cdot t - 37^0)$ В, $i = 4\sin(\omega \cdot t + 23^0)$ А. Записать выражения действующих значений напряжения и тока в символической форме. Найти комплексное сопротивление, определить характер цепи и нарисовать эквивалентную схему. Определить активную, реактивную и полную мощности.

Решение.

Так как $u = 200\sin(\omega \cdot t - 37^0) = \mathrm{Im}\left[200 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - 37^0)}\right]$

и $i = 4\sin(\omega \cdot t + 23^0) = \mathrm{Im}\left[4 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + 23^0)}\right]$,

то $\dot{U}_m = 200 \cdot e^{-j \cdot 37^0}$, $\dot{I}_m = 4 \cdot e^{j \cdot 23^0}$.

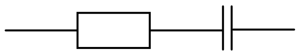
Теперь можно перейти к действующим значениям:

$$\dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 37^0} = 141 \cdot e^{-j \cdot 37^0}\ B,\ \dot{I} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 23^0} = 2{,}82 \cdot e^{j \cdot 23^0}\ A.$$

Найдем комплексное сопротивление

$$Z=\frac{\dot U_m}{\dot I_m}=\frac{200\cdot e^{-j\cdot 37^0}}{4\cdot e^{j\cdot 23^0}}=50\cdot e^{j\cdot\left(-37^0-23^0\right)}=50\cdot e^{-j\cdot 60^0}=25-j\cdot 43{,}3\ \textit{Ом}.$$

Это сопротивление активно-емкостного характера, где $R=25\,\textit{Ом}$, $X_C=43{,}3\,\textit{Ом}$. Эквивалентная схема будет



$R \quad -jX_C$

Комплексная мощность

$$\tilde S=\dot U\cdot\dot I^*=\frac{200}{\sqrt2}\cdot e^{-j\cdot 37^0}\cdot\frac{4}{\sqrt2}\cdot e^{-j\cdot 23^0}=400\cdot e^{-j\cdot 60^o}=200-j\cdot 346.$$

Выпишем активную, реактивную и полную мощности:

$$P=\mathrm{Re}\,\tilde S=200\ \textit{Вт};\ Q=\mathrm{Im}\,\tilde S=-400\sin 60^o\approx -346\ \textit{ВАр};\ S=\left|\tilde S\right|=400\ \textit{ВА}.$$

Пример 6.3. Для схемы (рис.6.5) найдите полное комплексное сопротивление, если $R=10\ \textit{Ом}$, $L=0{,}0637\ \textit{Гн}$, $C=318\cdot 10^{-6}\ \textit{Ф}$, $\omega=314\ \textit{рад/с}$.

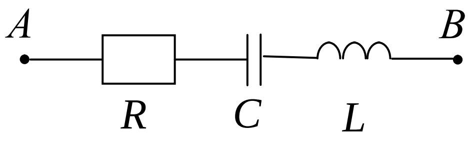


Рис.6.5

Дополнительные вопросы.

1) Какого типа сопротивление? Нарисуйте эквивалентную схему.
2) Определите ток в цепи, если комплекс действующего значения общего напряжения $\dot U=220$ В;
3) Найдите $u_R(t)$ и $u_{CL}(t)$;
4) Определить активную, реактивную и полную мощности.

Решение.

Запишем сопротивления элементов цепи:

$Z_R=R=10\ \textit{Ом}$,

$Z_L=L\cdot\omega\cdot j=314\cdot 0{,}0637\cdot j=20j\ \textit{Ом}$,

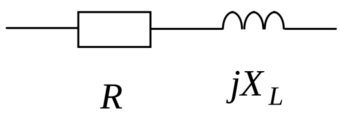
$$Z_C=\frac{1}{C\cdot\omega\cdot j}=\frac{-j}{C\cdot\omega}=-\frac{j}{314\cdot 318\cdot 10^{-6}}=-10j\ \textit{Ом}.$$

Так как сопротивление R, индуктивность L и емкость С соединены последовательно, то Z_R, Z_C и Z_L нужно последовательно сложить, что дает полное комплексное сопротивление:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L = 10 - 10j + 20j = 10 + 10j \quad Ом.$$

Ответы на дополнительные вопросы.

1) Полное комплексное сопротивление является <u>активно-индуктивным.</u> Эквивалентная схема будет



2) Вычислим комплекс действующего значения тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot 45^0}} = 11\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} \; A.$$

3) Найдем напряжения $u_R(t)$ и $u_{CL}(t)$.

Так как $Z_R = 10 \;\; Ом$, $Z_{CL} = Z_C + Z_L = -10j + 20j = 10j \;\; Ом$ и комплексы действующих значений равны

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot Z_R = 11\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} \cdot 10 = 110\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} \; B,$$
$$\dot{U}_{CL} = \dot{I} \cdot Z_{CL} = 11\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(-45^0\right)} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 90^0} = 110\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(45^0\right)} \; B,$$

то

$$u_R(t) = \sqrt{2} \cdot 110\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - 45^0\right) = 220 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - 45^0\right) \; B;$$
$$u_{CL}(t) = \sqrt{2} \cdot 110\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right) = 220 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right) \; B.$$

4) Комплексная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 220 \cdot 11\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot 45^0} = 2420\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot 45^o} == 2420\sqrt{2}\cos 45^o +$$
$$+ j \cdot 2420\sqrt{2}0\sin 45^o = 2420\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot 2420\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2420 + 2420j$$

Выпишем активную, реактивную и полную мощности:

$$P = \operatorname{Re}\tilde{S} = 2420 \;\; Bm; \; Q = \operatorname{Im}\tilde{S} = 2420 \;\; BAp; \; S = \left|\tilde{S}\right| = 2420\sqrt{2} \;\; BA.$$

Пример 6.4. Для неразветвленной цепи переменного тока, векторная диаграмма которой показана на рис.6.6, выразить напряжения и ток комплексными числами в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной, если известно:

$U_1 = 220\ В$, $U_2 = 127\ В$ и $I = 2\ А$.

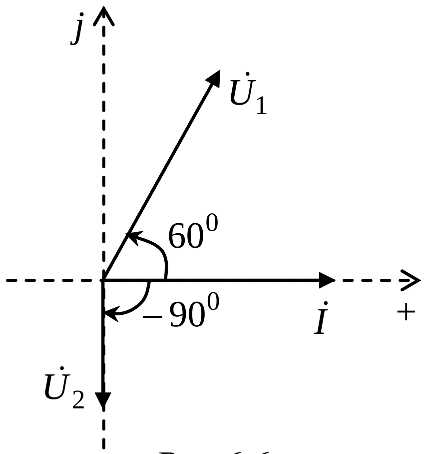


Рис.6.6

Решение. Выпишем комплексные амплитуды для напряжений и тока по диаграмме:

$$\dot{U}_1 = U_1 \cdot e^{j \cdot 60^0} = 220 \cdot e^{j \cdot 60^0} = 220 \cdot \left(\cos 60^0 + j \cdot \sin 60^0\right) = (110 + j \cdot 190{,}5)\ В;$$

$$\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j \cdot \left(-90^0\right)} = 127 \cdot e^{j \cdot \left(-90^0\right)} = (0 - j \cdot 127)\ В;$$

$$\dot{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^0} = 2 \cdot e^{j \cdot 0^0} = (2 + j \cdot 0)\ А.$$

<u>Дополнительные вопросы и ответы на них к задаче.</u>

1. Зачем нужны различные формы записи комплексных чисел и величин?

Показательная форма выражает абсолютное значение комплексной величины (модуль) и направление ее вектора (аргумент). В этом проявляется наглядность показательной формы. Она удобна при умножениях и делениях комплексных величин и чисел (например, при определении полного сопротивления как отношения напряжения к току).

Однако показательная форма непригодна для аналитического сложения и вычитания комплексных величин и чисел. В этих случаях нужно пользоваться алгебраической формой.

Тригонометрическая форма связывает показательную с алгебраической и показывает переход от одной формы к другой.

2. Как определить сопротивления участков неразветвленной цепи, ток I и напряжения U_1 и U_2 которых показаны на рис.24?

Для участка цепи с напряжением U_1 и током I комплексное сопротивление

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}} = \frac{220 \cdot e^{j \cdot 60^0}}{2 \cdot e^{j \cdot 0^0}} = 110 \cdot e^{j \cdot 60^0} = 55 + j \cdot 95{,}3 \ Ом.$$

Сопротивление Z_1 активно – индуктивного характера.

Для участка цепи с напряжением U_2 и током I комплексное сопротивление

$$Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}} = \frac{127 \cdot e^{-j \cdot 90^0}}{2 \cdot e^{j \cdot 0^0}} = 63{,}5 \cdot e^{-j \cdot 90^0} = 0 - j \cdot 63{,}5 \ Ом.$$

Сопротивление Z_2 емкостного характера.

3. Как определить общее напряжение цепи?

Считая, что рассматриваемая цепь состоит из двух последовательно включенных участков с напряжениями U_1 и U_2, имеем напряжение на всем участке цепи $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 110 + j \cdot 190{,}5 - j \cdot 127 = 110 + j \cdot 63{,}5 = 127 \cdot e^{j \cdot 30^0}$ B.

4. Как записать синусоидальную функцию времени напряжения по его комплексному значению?

Для этого надо знать комплекс действующего значения напряжения или комплексную амплитуду. В нашем случае известны комплексы действующих значений напряжений $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}$, поэтому

$$u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega \cdot t + 60^0\right) \text{ В};$$

$$u_2(t) = 127\sqrt{2}\sin\left(\omega \cdot t - 90^0\right) \text{ В};$$

$$u(t) = 127\sqrt{2}\sin\left(\omega \cdot t + 30^0\right) \text{ В}.$$

Пример 6.5. Для цепи, изображенной на рис.6.7, дано:

$R_1 = 10 \ Ом$, $R_2 = 9 \ Ом$, $X_{L2} = 12 \ Ом$, $X_{C3} = 10 \ Ом$, $U = 127 \ B$.

Определить комплексы токов ветвей $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, общего тока $\dot{I}$, а также активную, реактивную и полную мощности.

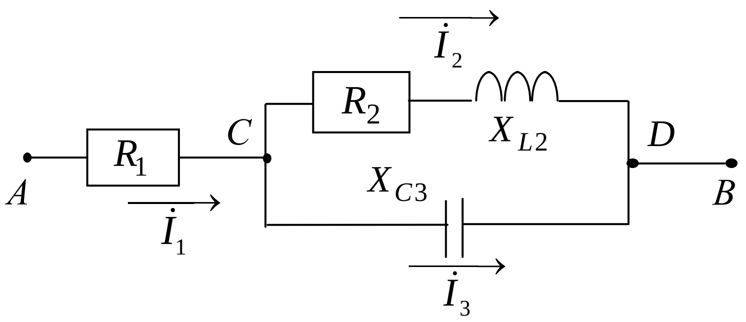


Рис.6.7

Решение. Комплексы сопротивлений участков (по номерам токов) будут равны: $Z_1 = R_1 = 10\ Ом$,

$$Z_2 = R_2 + X_{L2} \cdot j = 9 + 12j = 15 \cdot e^{j \cdot 53{,}13^0}\, Ом,$$

$$Z_3 = X_{C3} \cdot (-j) = -10j = 10 \cdot e^{-j \cdot 90^0}\ \ Ом$$

Для участка *CD* имеем $\dfrac{1}{Z_{CD}} = \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}$, следовательно,

$$Z_{CD} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{15e^{j \cdot 53{,}13^0} \cdot 10e^{-j \cdot 90^0}}{9 + 12j - 10j} = \frac{150e^{-j \cdot 36{,}87^0}}{9{,}2e^{j \cdot 12{,}53^0}} =$$

$$= 16{,}3 \cdot e^{-j \cdot 49{,}4^0} = 10{,}6 - j \cdot 12{,}38\ \ Ом$$

Полное сопротивление цепи равно

$$Z = Z_1 + Z_{CD} = 10 + 10{,}6 - j \cdot 12{,}38 = 20{,}6 - j \cdot 12{,}38 = 23{,}78 \cdot e^{-j \cdot 31^0}\, Ом.$$

Оно является <u>активно-емкостным.</u>

Вектор заданной величины (тока или напряжения) можно направить в любом направлении. Однако удобнее совмещать его с вещественной или мнимой осью.

В рассмотренном примере заданное напряжение направляется по вещественной оси. Таким образом, комплекс общего напряжения будет равен

$$\dot U = U \cdot e^{j \cdot 0^0} = 127 \cdot e^{j \cdot 0^0} = 127\ \ B.$$

Комплекс тока цепи $\dot I$ равен комплексу первого тока $\dot I_1$:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{127 \cdot e^{j \cdot 0^0}}{23{,}78 \cdot e^{-j \cdot 31^0}} = 5{,}3 \cdot e^{j \cdot 31^0}\, A.$$

Комплекс напряжения на участке *AC*:

$$\dot{U}_{AC} = \dot{I}_1 \cdot Z_1 = 5{,}3 \cdot e^{j \cdot 31^0} \cdot 10 = 53 \cdot e^{j \cdot 31^0}\, \text{В}.$$

Комплекс напряжения на участке *CD*:

$$\dot{U}_{CD} = \dot{I} \cdot Z_{CD} = 5{,}3 \cdot e^{j \cdot 31^0} \cdot 16{,}3 \cdot e^{-j \cdot 49{,}4^0} = 86{,}39 \cdot e^{-j \cdot 18{,}4^0}\, B.$$

Комплексы токов $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{CD}}{Z_2} = \frac{86{,}39 \cdot e^{-j \cdot 18{,}4^0}}{15 \cdot e^{j \cdot 53{,}13^0}} = 5{,}76 \cdot e^{-j \cdot 71{,}53^0}\, A,$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{CD}}{Z_3} = \frac{86{,}39 \cdot e^{-j \cdot 18{,}4^0}}{10 \cdot e^{-j \cdot 90^0}} = 8{,}64 \cdot e^{j \cdot 71{,}6^0}\, A.$$

Комплекс полной мощности цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 127 \cdot e^{j \cdot 0^0} \cdot 5{,}3 \cdot e^{-j \cdot 31^0} = 673{,}1 \cdot e^{-j \cdot 31^0} = 576{,}03 - j \cdot 345{,}62\,.$$

Выпишем активную, реактивную и полную мощности:

$$P = \operatorname{Re} \tilde{S} = 576{,}03\ Bm;\ Q = \operatorname{Im} \tilde{S} = -345{,}62\ BAp;\ S = \left|\tilde{S}\right| = 671{,}77\ BA.$$

Программа расчёта в пакете Mathcad приводится ниже.

Исходные данные.

$R_1 := 10$ $R_2 := 9$ $X_L := 12$ $X_C := 10$ $U := 127$

Задание комплекса действующего значения приложенного напряжения

$U_k := U$

Расчёт комплексных сопротивлений ветвей

$Z_1 := R_1$ $Z_1 = 10$

$Z_2 := R_2 + X_L \cdot i$ $Z_2 = 9 + 12i$

$Z_3 := -X_C \cdot i$ $Z_3 = -10i$

Расчёт комплексного сопротивления на участке *CD*.

$$Z_{CD} := \frac{(Z_2 \cdot Z_3)}{Z_2 + Z_3} \qquad Z_{CD} = 10.588 - 12.353i$$

Расчёт полного сопротивления цепи.

$$Z := Z_1 + Z_{CD} \qquad Z = 20.588 - 12.353i$$

Вычисление комплекса тока цепи.

$$I_k := \frac{U_k}{Z} \qquad I_k = 4.536 + 2.721i$$

Определение тока на участке *AC*.

$$I_1 := I_k$$

Вычисление комплекса напряжения на участке *AC*.

$$U_{k1} := I_1 \cdot Z_1 \qquad U_{k1} = 45.357 + 27.214i$$

Вычисление комплекса напряжения на участке CD.

$$U_{kCD} := I_k \cdot Z_{CD} \qquad U_{kCD} = 81.643 - 27.214i$$

Вычисление комплекса тока I_2.

$$I_2 := \frac{U_{kCD}}{Z_2} \qquad I_2 = 1.814 - 5.443i$$

Вычисление комплекса тока I_3.

$$I_3 := \frac{U_{kCD}}{Z_2} \qquad I_3 = 1.814 - 5.443i$$

Задание комплексной мощности.

$$S_k := U_k \cdot \overline{I_k}$$

Вычисление активной, реактивной и полной мощности.

$P := \mathrm{Re}(S_k)$ $\qquad P = 576.036$

$Q := \mathrm{Im}(S_k)$ $\qquad Q = -345.621$

$S := |S_k|$ $\qquad S = 671.767$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6.

Вычисления полного комплексного сопротивления при последовательном и параллельном соединении.

1. В цепи (рис.6.8) даны: $\dot{U} = 120\,B$, $Z_1 = (10 + j\cdot 6)\,Ом$, $Z_2 = (24 - j\cdot 7)\,Ом$, $Z_3 = (15 + j\cdot 20)\,Ом$. Определить токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, а также активную, реактивную и полную мощности всей цепи. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

2. Вычислить активное сопротивление и индуктивность катушки на частоте 50 Гц, если ее комплексное сопротивление $Z = 240{,}8\cdot e^{j\cdot 51{,}5^0}$. Нарисуйте эквивалентную схему.

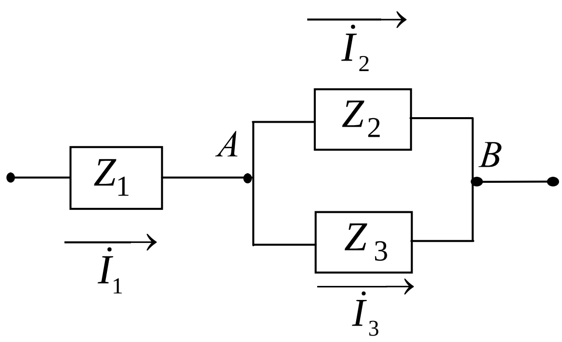


Рис.6.8

3. В цепи из последовательно включенных сопротивлений $R = 10$ Ом; $X_L = 25$ Ом; $X_C = 15$ Ом известен комплексный ток $\dot{I} = 12\,A$. Найти общее комплексное сопротивление. Вычислить комплексные напряжения на каждом сопротивлении и на выводах цепи.

Задание на дом.

Требования к решению задач: 1) составить алгоритм решения задачи; 2)написать программу расчёта в пакете Mathcad; 3) все необходимые диаграммы построить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге.

1. По векторной диаграмме рис.6.9 составить комплексы действующих значений тока и напряжения, если их действующие значения $I = 2$ А, $U = 127$ В.

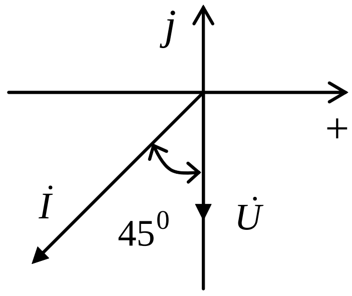


Рис.6.9

Дополнительные вопросы к задаче.

1) Как определить сопротивление?

2) Какого типа сопротивление? Нарисуйте эквивалентную схему.

3) Как записать синусоидальные функции времени для тока и напряжения, если известны их комплексы действующих значений?

4) Как находится комплексная мощность?

5) Как определяются активная, реактивная и полная мощности?

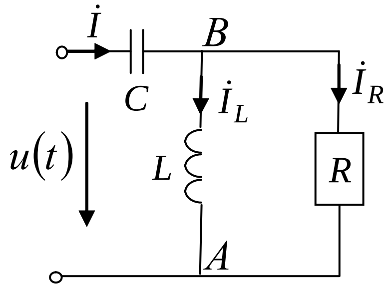


Рис.6.10

2. На входе цепи со схемой рис.6.10 действующее значение напряжения $U = 100$ *В*. Найти действующие значения токов ветвей, если $X_C = 20$ *Ом,* $R = 80$ *Ом,* $X_L = 60$ *Ом*. Вычислить активную, реактивную и полную мощность. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

<u>ЛЕКЦИЯ №7.</u> Законы Кирхгофа

Для расчета более сложных цепей используются законы Кирхгофа.

На проводах и в узлах схемы не могут накапливаться заряды. Поэтому для любого узла схемы справедлив *первый закон Кирхгофа*: алгебраическая сумма мгновенных токов в проводах, соединенных в узел, равна нулю, т.е.

$$\sum_k i_k(t) = 0 .$$

Подставив в уравнение вместо $i_k(t)$ комплексную функцию времени $\dot{I}_k \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ и вынеся $e^{j\cdot\omega\cdot t}$ за скобку, получим $e^{j\cdot\omega\cdot t}\sum\limits_k \dot{I}_k = 0$. Так как $e^{j\cdot\omega\cdot t}$ не равно нулю при любом *t*, то

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Это уравнение представляет собой первый закон Кирхгофа в символической записи.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи можно составить уравнение по *второму закону Кирхгофа*, который звучит так: сумма э.д.с. в замкнутом контуре равна сумме напряжений на остальных элементах контура:

$$\sum_k u_k(t) = \sum_k e_k(t).$$

В комплексной области это уравнение примет вид:

$$\sum_k \dot{I}_k \cdot Z_k = \sum_k \dot{E}_k .$$

В результате получаем систему алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_k \dot{I}_k = 0 \\ \sum\limits_k \dot{I}_k \cdot Z_k = \sum\limits_k \dot{E}_k \end{cases}, \qquad (7.1)$$

которые выражают первый и второй законы Кирхгофа для обобщенных амплитуд.

Пример 7.1. Пусть имеется узел в цепи, к которому подключены четыре ветви, как это показано на рис.7.1. В первых трех ветвях ток направлен к узлу, а в четвертой - от узла. Все токи синусоидальные и параметры трех из них известны: $i_1(t) = 4\sin t$, $i_2(t) = 6\sin\left(t + 90^0\right)$, $i_3(t) = 2\sin\left(t - 90^0\right)$. Требуется определить четвертый ток.

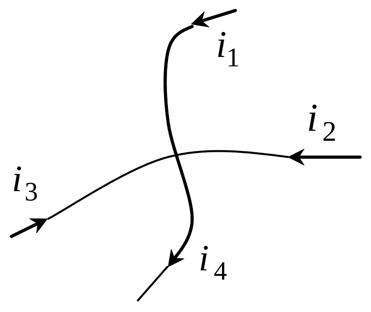


Рис.7.1

Решение. Для решения этой задачи необходимо все токи перевести в комплексную форму, т.е. записать их комплексные амплитуды: $\dot{I}_{m1} = 4$, $\dot{I}_{m2} = 6 \cdot e^{j90^0} = j6$, $\dot{I}_{m3} = 2 \cdot e^{-j90^0} = -j2$. Затем воспользоваться законом токов Кирхгофа в комплексной форме для комплексных амплитуд токов:

$$\dot{I}_{m4} = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} = 4 + j6 - j2 = 4 + j4 = 4\sqrt{2}e^{-j45^0}.$$

И, наконец, по найденной комплексной амплитуде четвертого тока можно записать его синусоидальную функцию времени $i_4(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(t + 45^0\right)$.

Пример 7.2. Разветвленная цепь рис.7.2 состоит из параллельных ветвей с параметрами: $R_1 = 80$ *Ом*; $R_2 = 260$ *Ом*; $L_1 = 0{,}19$ *Гн*; $C_2 = 21{,}2$ *мкФ*.

Цепь питается от генератора синусоидального напряжения $U = 120$ В частотой $f = 50$ *Гц*. Найти комплексы токов $\dot{I}$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и вычислить активную, реактивную и полную мощности всей цепи. В пакете Mathcad записать синусоидальные функции времени для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$ и построить их графики.

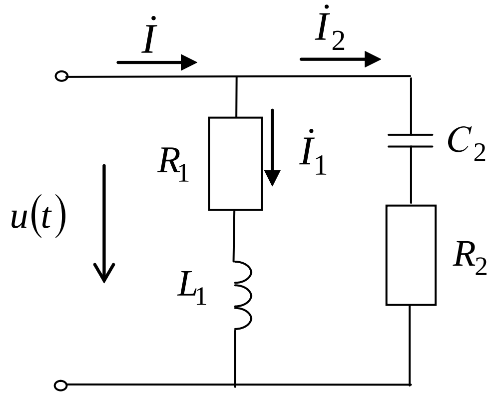


Рис.7.2

Решение.

1. Вычисление сопротивлений.

Для $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314$ с запишем комплексные сопротивления на элементах:

$$Z_{L1} = j \cdot \omega \cdot L_1 = j \cdot 314 \cdot 0{,}19 = j \cdot 60 \ \textit{Ом};$$

$$Z_{R_1} = R_1 = 80 \ \textit{Ом};$$

$$Z_{R_2} = R_2 = 260 \ \textit{Ом};$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} = \frac{1}{j \cdot 314 \cdot 21{,}2 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 150 \ \textit{Ом}.$$

Сопротивление ветвей:

$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_{L_1} = 80 + j \cdot 59.69 = 99{,}81 \cdot e^{j \cdot 36{,}72^0} \ \textit{Ом};$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_{C_2} = 260 - j \cdot 150{,}1 = 300{,}2 \cdot e^{-j \cdot 30^0} \ \textit{Ом}.$$

Общее комплексное сопротивление:

$$Z=\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{100\cdot e^{j\cdot 37^0}\cdot 300\cdot e^{-j\cdot 30^0}}{80+j60+260-j150}=\frac{3000\cdot e^{j\cdot 7^0}}{35{,}2\cdot e^{-j\cdot 14{,}8^0}}=85{,}2\cdot e^{j\cdot 21{,}62^0}\ \ Ом.$$

2. Вычисление токов.

Комплексное действующее значение напряжения $\dot{U}=120$ В.

Для комплексов общего тока и токов ветвей получим:

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{120}{86\cdot e^{j\cdot 21{,}8^0}}=1{,}4\cdot e^{-j\cdot 21{,}62^0}A;$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{Z_1}=\frac{120}{100\cdot e^{j\cdot 37^0}}=1{,}2\cdot e^{-j\cdot 36{,}72^0}\ A;$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{Z_2}=\frac{120}{100\cdot e^{-j\cdot 30^0}}=0{,}4\cdot e^{j\cdot 30^0}A.$$

Комплексная мощность цепи:

$$\tilde{S}=\dot{U}\dot{I}^*=120\cdot 1{,}4\cdot e^{j\cdot 21{,}8^0}=168\cdot\cos 21{,}8^0+j\cdot 168\cdot\sin 21{,}8^0=157.16+j\cdot 62{,}28.$$

Выпишем активную, реактивную и полную мощности:

$P=157{,}16\ Вт;\ Q=62{,}28\ ВАр;\ S=169\ ВА.$

Программа расчёта в пакете Mathcad.

Исходные данные.

$U := 120 \qquad f := 50 \qquad R_1 := 80$

$L_1 := 0.19 \qquad R_2 := 260 \qquad C_2 := 21.2\cdot 10^{-6}$

Задания комплекса действующего значения напряжения.

$U_k := U$

Вычисление угловой частоты и периода.

$\omega := 2\cdot\pi\cdot f \qquad \omega = 314.159$

$T := \frac{1}{f} \qquad T = 0.02$

Расчёт комплексных сопротивлений на элементах.

$Z_{L.1} := i\cdot L_1\cdot\omega \qquad Z_{L.1} = 59.69i$

$Z_{R.1} := R_1$ $\quad$ $Z_{R.1} = 80$

$Z_{R.2} := R_2$ $\quad$ $Z_{R.2} = 260$

$Z_{C.2} := \frac{1}{C_2 \cdot \omega \cdot i}$ $\quad$ $Z_{C.2} = -150.146i$

Вычисление сопротивлений ветвей.

$Z_1 := Z_{R.1} + Z_{L.1}$ $\quad$ $Z_1 = 80 + 59.69i$

$Z_2 := Z_{R.2} + Z_{C.2}$ $\quad$ $Z_2 = 260 - 150.146i$

Расчёт общего комплексного сопротивления.

$Z := \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $\quad$ $Z = 79.186 + 31.384i$

Вычисление комплексов токов ветвей и общего тока цепи.

$I_{k1} := \frac{U_k}{Z_1}$ $\quad$ $I_{k1} = 0.964 - 0.719i$

$I_{k2} := \frac{U_k}{Z_2}$ $\quad$ $I_{k2} = 0.346 + 0.2i$

$I_k := \frac{U_k}{Z}$ $\quad$ $I_k = 1.31 - 0.519i$

Задание комплексной мощности цепи.

$S_k := U_k \cdot \overline{I_k}$

Вычисление активной, реактивной и полной мощности.

$P := \mathrm{Re}(S_k)$ $\quad$ $P = 157.162$

$Q := \mathrm{Im}(S_k)$ $\quad$ $Q = 62.289$

$S := |S_k| \qquad S = 169.056$

Вычисление амплитуд токов ветвей и общего тока цепи.

$I_{m1} := \sqrt{2}\cdot|I_{k1}| \qquad I_{m1} = 1.7$

$I_{m2} := \sqrt{2}\cdot|I_{k2}| \qquad I_{m2} = 0.565$

$I_m := \sqrt{2}\cdot|I_k| \qquad I_m = 1.992$

Вычисление начальных фаз токов ветвей и общего тока цепи.

$\psi_1 := \arg(I_{k1})\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \psi_1 = -36.728$

$\psi_2 := \arg(I_{k2})\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \psi_2 = 30.006$

$\psi := \arg(I_k)\cdot\frac{180}{\pi} \qquad \psi = -21.62$

Задание мгновенных значений токов ветвей и общего тока цепи.

$i_1(t) := I_{m1}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_1)$

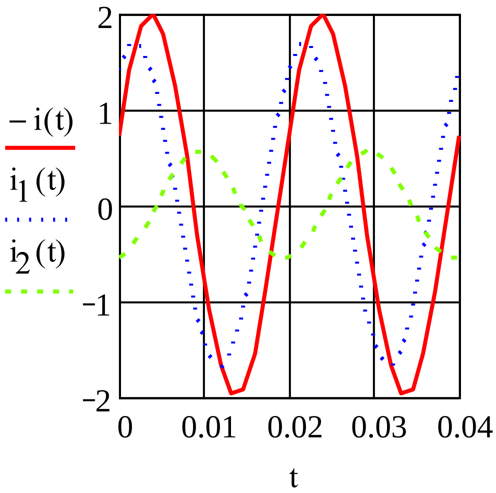
$i_2(t) := I_{m2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi_2)$

$i(t) := I_m\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi)$

По первому закону Кирхгофа $i_1(t)+i_2(t)+i(t)=0$ и $i_1(t)+i_2(t)=-i(t)$, поэтому вместе с графиками функций $i_1(t)$ и $i_2(t)$ строим график функции $-i(t)$.

Для построения графиков временных диаграмм токов определим время как дискретный аргумент

$n := 15 \quad h := \frac{T}{n} \qquad t := 0, 0 + h .. 2T$



Дополнительные вопросы к задаче и ответы на них.

1. *Почему вектор общего напряжения был направлен по оси вещественных чисел?*

Этот вопрос закономерен, если учесть, что направление вектора $\dot{U}$ может быть выбрано произвольно. Сделанный выбор обеспечил простое выражение для комплексной величины $\dot{U}$ (не содержит мнимой части).

2. *Какие изменения произойдут в расчетах, если, например, принять* $\dot{U} = j \cdot U$ *?*

Если принять $\dot{U} = j \cdot U$, т.е. расположить вектор $\dot{U}$ в положительном направлении мнимой оси, то все комплексные токи окажутся умноженными на *j*. При этом модули всех комплексов останутся прежними, а аргументы увеличатся на 90^0, т.е. векторы повернутся на 90^0 в положительном направлении. Векторная диаграмма вся повернется на 90^0 против направления движения часовой стрелки. Так как модули векторов и сдвиги по фазе между ними остаются прежними, то это и дает право выбирать произвольно направление одного из векторов.

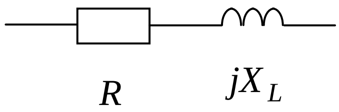
3. *Каков порядок расчета цепи при заданном токе ветви или напряжении на каком-либо участке?*

В этом случае принимают вектор тока или напряжения (заданный) направленным по оси вещественных чисел (оси +) и выражают этот вектор комплексным числом, которое равно действующему значению заданного тока или напряжения (начальная фаза равна нулю).

4. *Какого типа получилось общее сопротивление цепи? Нарисуйте эквивалентную схему.*

$$Z = 86 \cdot e^{j \cdot 21,8^0} = 86 \cdot \cos 21,8^0 + 86 \cdot \sin 21,8^0 = 80 + 32 \cdot j \ Ом$$

Сопротивление Z активно-индуктивного характера, где $R = 80 \ Ом$ и $X_L = 32 \ Ом$. Эквивалентная схема имеет вид:



5. *Как решить рассмотренную задачу, применяя проводимости ветвей?*

Находим комплексные проводимости ветвей:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{99,81 \cdot e^{j \cdot 36,72^0}} = 0,01 \cdot e^{-j \cdot 36,72^0} = 8,03 \cdot 10^{-3} - j \cdot 5,99 \cdot 10^{-3} \ См;$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{300,2 \cdot e^{-j \cdot 30^0}} = 3,33 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j \cdot 30^0} = 2,88 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,66 \cdot 10^{-3} \ См.$$

Поскольку для параллельного соединения комплексная проводимость всей цепи равна сумме комплексных проводимостей ветвей, то

$$Y = Y_1 + Y_2 = 10,9 \cdot 10^{-3} - j \cdot 4,3 \cdot 10^{-3} = 11,7 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j 21,8^0} \ См.$$

Комплексный общий ток цепи

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot Y = 120 \cdot 11,7 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j \cdot 21,8^0} = 1,4 \cdot e^{-j \cdot 21,8^0} \ А.$$

6. Как проверить результаты, полученные в задаче?

Применяя комплексные числа к расчету цепей переменного тока, легко сделать проверку вычислений на основе законов Кирхгофа. Проверим, например, равенство суммы комплексных токов ветвей комплексному общему току (по первому закону):

$$\dot{I}_1 = 1,2 \cdot e^{-j \cdot 36,72^0} = 1,2 \cdot \left(\cos 36,72^0 - j \sin 36,72^0\right) = (0,96 - j \cdot 0,72) \ А;$$

$$\dot{I}_2 = 0,4 \cdot e^{j \cdot 30^0} = 0,4 \cdot \left(\cos 30^0 + \sin 30^0\right) = (0,35 + j \cdot 0,2) А.$$

их сумма $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1{,}31 - j \cdot 0{,}52 = 1{,}4 \cdot e^{-j \cdot 21{,}8^0} = \dot{I}$

Пример 7.3. Для цепи рис.7.3 известно, что

$Z_1 = j \cdot 2 \; Ом,\; Z_2 = j \cdot 5 \; Ом,$

$Z_3 = 4 \; Ом,\; Z_4 = -j \cdot 3 \; Ом,$

$i_3(t) = 3\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000 \cdot t - 90^0\right) A$

.

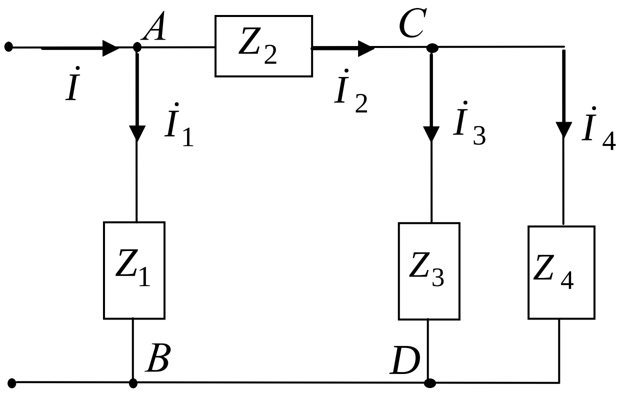


Рис.7.3

Определить $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_4(t)$, а также активную, реактивную и полную мощности всей цепи.

Решение. Так как $\dot{I}_{m3} = 3\sqrt{2} \cdot e^{-j \cdot 90^0} = -3\sqrt{2} \cdot j$, то комплекс действующего значения $\dot{I}_3 = -3j = 3 \cdot e^{-j \cdot 90^0}$ A. Найдем напряжение на участке CD: $\dot{U}_{CD} = Z_3 \cdot \dot{I}_3 = 4 \cdot (-3j) = -12j$ B, тогда $\dot{I}_4 = \dfrac{\dot{U}_{CD}}{Z_4} = \dfrac{(-12j)}{(-3j)} = 4$ A.

Используя первый и второй законы Кирхгофа, последовательно определяем:

$\dot{I}_2 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 4 - 3j = 5 \cdot e^{-j \cdot 37^0} A;$

$\dot{U}_2 = Z_2 \cdot \dot{I}_2 = 5j \cdot (4 - 3j) = 15 + 20j = 25 \cdot e^{j \cdot 53^0} B;$

$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_2 + \dot{U}_{CD} = 15 + 20j - 12j = 15 + 8j = 17 \cdot e^{j \cdot 28^0} B;$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_1} = \frac{17 \cdot e^{j \cdot 28^0}}{2 \cdot e^{j \cdot 90^0}} = 8{,}5 \cdot e^{-j \cdot 62^0} = (4 - 7{,}5j) \; A;$$

$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - 7{,}5j + 4 - 3j = 8 - 10{,}5j = 13{,}2 \cdot e^{-j \cdot 52{,}7^0} A.$

По найденным комплексам действующих значений токов в ветвях выпишем их синусоидальные функции времени:

$i(t) = 13{,}2\sqrt{2} \sin\left(1000 \cdot t - 52{,}7^0\right) \; A;$

$i_1(t) = 8{,}5\sqrt{2} \sin\left(1000 \cdot t - 62^0\right) \; A;$

$i_2(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(1000 \cdot t - 37^0\right) \; A;$

$$i_4(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(1000 \cdot t + 0^0\right)\ A.$$

Для вычисления мощностей воспользуемся найденными комплексными значениями $\dot{U} = \dot{U}_{AB} = (15 + 8j)$В и $\dot{I} = (8 - 10{,}5j)$А:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = (15 + 8j)\cdot(8 + 10{,}5j) = 36 + 221{,}5j.$$

Следовательно, $P = 36\,Вт$; $Q = 221{,}5\ ВАр$; $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 224{,}4\ ВА$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

Применение законов Кирхгофа при расчёте цепей синусоидального переменного тока.

1. В цепи (рис.7.4) все токи синусоидальные и параметры трех из них известны:

$$i_1(t) = 2\sin\omega t,$$

$$i_2(t) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^0\right),$$

$$i_5(t) = 2\sin\left(\omega t - 90^0\right).$$

Требуется определить токи $i_3(t)$ и $i_4(t)$.

Постройте векторную диаграмму токов.

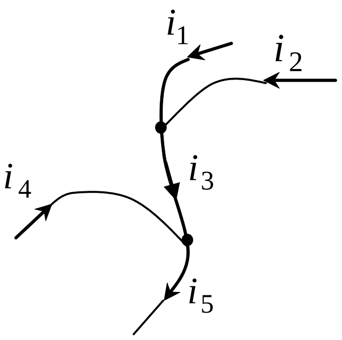


Рис.7.4

2. Для цепи, схема которой приведена на рис. 7.5, требуется определить следующие величины:

1) токи во всех ветвях цепи;

2) напряжения на элементах цепи;

3) активную, реактивную и полную мощности цепи;

4) построить векторную диаграмму токов и напряжений;

5) В пакете Mathcad на одном рисунке постройте графики токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, на другом – графики напряжений $u(t)$, $u_{AC}(t)$, $u_{CD}(t)$

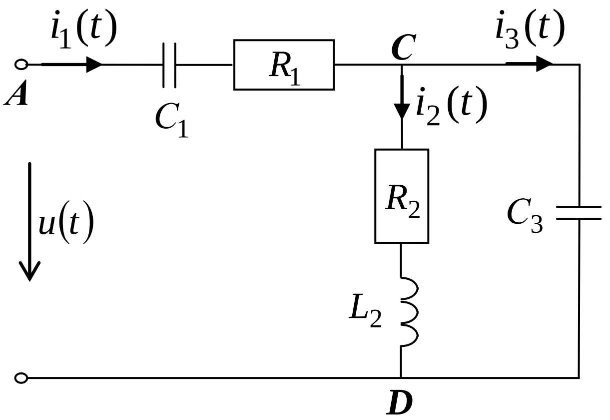


Рис.7.5

Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $i_2(t) = 5\sin 100t\ A$; $C_1 = 100\ мкФ$; $C_3 = 100\ мкФ$; $L_2 = 300\ мГн$; $R_1 = 50\ Ом$; $R_2 = 40\ Ом$.

Задание на дом.

Требования к решению задач: 1) составить алгоритм решения задачи; 2)написать программу расчёта в пакете Mathcad; 3) все необходимые диаграммы построить с соблюдением масштабов на миллиметровой бумаге.

1. Разветвленная цепь (рис.7.6) имеет параметры: $Z_1 = -10j\ Ом$, $Z_2 = 10\ Ом$, $Z_3 = 10j\ Ом$, $i_3(t) = 28 \cdot \sin\left(100 \cdot t + 53^0\right) A$.

Определите:

1) токи $i_1(t)$, $i_2(t)$;

2) напряжения $u(t)$ $u_{AC}(t)$, $u_{CD}(t)$;

3) вычислите активную, реактивную и полную мощности цепи;

4) построй те векторные диаграммы токов и напряжений;

5) в пакете Mathcad на одном рисунке постройте графики токов $i_1(t)$, $i_2(t)$,$i_3(t)$, на другом – графики напряжений $u(t)$, $u_{AC}(t)$, $u_{CD}(t)$.

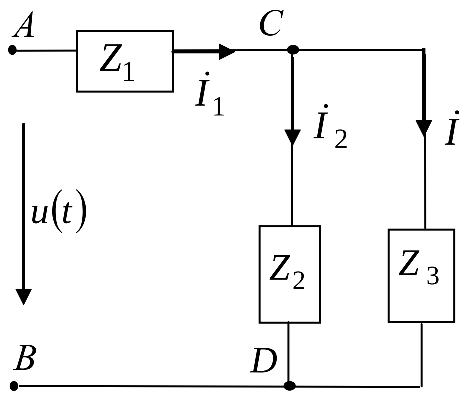


Рис.7.6

<u>ЛЕКЦИЯ №8.</u> Комплексное уравнение окружности и круговые диаграммы.

Из курса геометрии известно, что вписанным углом называется угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

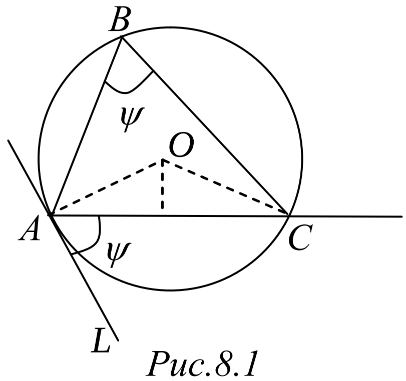


Рис.8.1

На рисунке 8.1 угол $\angle ABC = \psi$ является вписанным. Он опирается на хорду *AC*. Если провести касательную к окружности в точке *A*, то угол между касательной *AL* и хордой

AC будет равен вписанному углу $\angle LAC = \angle ABC = \psi$. Действительно, т.к. центральный угол $\angle AOC = 2\psi$, и треугольник AOC равнобедренный, то $\angle CAO = 90^0 - \psi$. Поскольку радиус OA перпендикулярен к касательной AL, то угол $\angle LAO = 90^0$ и $\angle LAC = \angle LAO - \angle CAO = 90^0 - \left(90^0 - \psi\right) = \psi$. Мы доказали, что угол между хордой AC и касательной в точке A равен вписанному углу.

Из изложенного следует, что если заданы хорда AC и вписанный угол ψ, то для нахождения центра окружности необходимо (рис.8.2):

1) построить перпендикуляр к середине хорды AC;
2) построить касательную в точке A (касательная в точке A проводится под углом ψ к хорде AC);
3) построить перпендикуляр к касательной в точке A; пересечение перпендикуляра к середине хорды и перпендикуляра к касательной даст центр окружности.

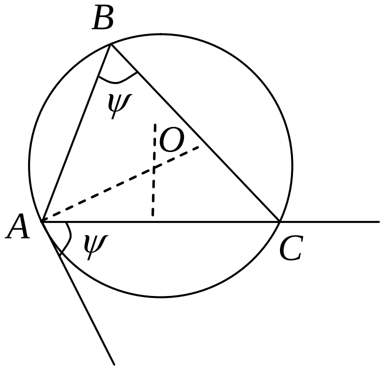


Рис.8.2

Заметим, что нахождение центра окружности не изменится, если в пункте 2) построение касательной заменить построением прямой параллельной касательной. Например, если вместо касательной в точке A, провести параллельную ей прямую через произвольную точку B, лежащую на хорде AC или на ее продолжении, а затем из точки A построить перпендикуляр к полученной прямой, то пересечение перпендикуляра к середине хорды AC и перпендикуляра к прямой даст центр окружности.

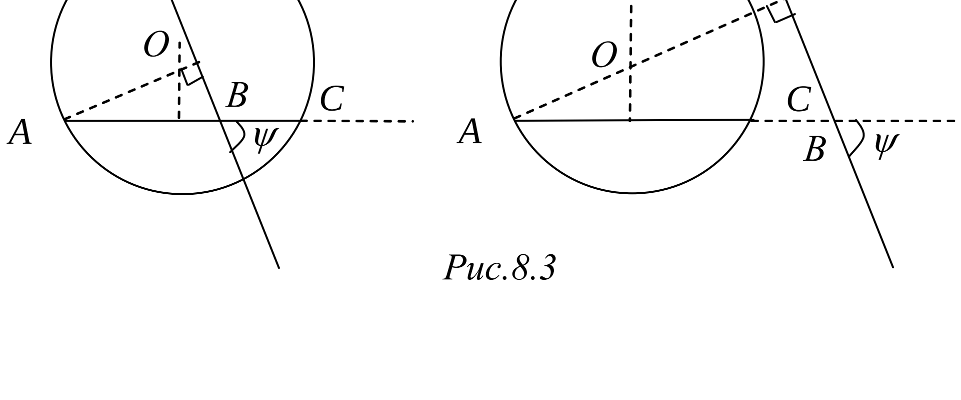


Рис.8.3

На рисунке 8.3 показаны построения для случая, когда точка B лежит на хорде AC или на ее продолжении.

Итак, для нахождения центра окружности достаточно:

- построить перпендикуляр к середине хорды;
- провести прямую под углом ψ к хорде AC или к ее продолжению через любую точку B, лежащую на хорде или на ее продолжении;
- через точку A провести перпендикуляр к построенной прямой;
- пересечения перпендикуляров к хорде и к прямой дает центр окружности.

Пусть $\psi > 0$. На комплексной плоскости (рис.8.4.) определим знаки углов следующим образом: $\angle ABC = \psi > 0$, если наикратчайший поворот луча BA к лучу BC совершается <u>против часовой</u> стрелки, и $\angle ABC = \psi < 0$, если поворот BA к BC совершается <u>по часовой стрелке</u>.

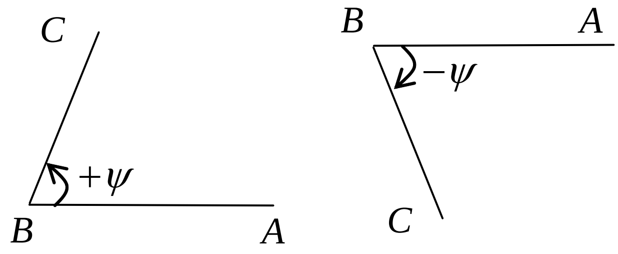


Рис.8.4

Если заданы хорда AC и вписанный угол $\angle ABC = \psi > 0$, то для нахождения центра окружности на комплексной плоскости, совместим хорду AC с осью «+», а мнимую ось «j» проведем через точку A (рис.8.5). Заметим, что касательная к окружности в точке A образует с хордой отрицательный угол $(-\psi)$, т.к. наикратчайший поворот касательной относительно хорды AC совершается по часовой стрелке.

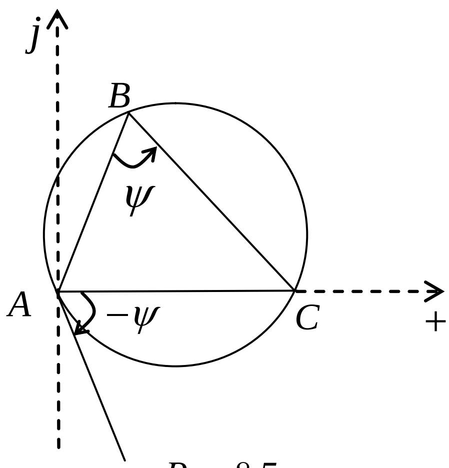


Рис.8.5

Сформулируем правила нахождения центра окружности на комплексной плоскости с помощью прямой, параллельной касательной к окружности в точке A:

1) построить перпендикуляр к середине хорды AC;

2) так как касательная в точке А повернута относительно хорды на угол (-ψ), то провести прямую под углом (-ψ) к хорде *AC* через любую точку *B*, лежащую на хорде или на ее продолжении;

3) из точки *A* провести перпендикуляр к построенной прямой;

4) пересечение перпендикуляров к хорде и к прямой дает центр окружности *O*.

Данное построение на комплексной плоскости демонстрирует рис. 8.6.

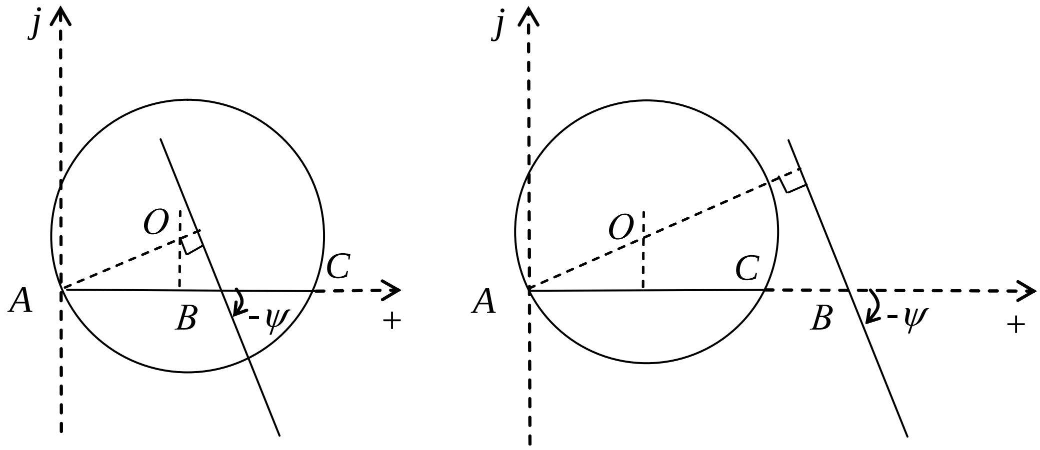


Рис.8.6

Напомним еще один факт из геометрии. Пусть на рис.8.7 вписанный угол $\angle ABC = \psi$, тогда угол $\angle ADC = 180^0 - \psi$, где *D* – точка дуги, на которую опирается угол $\angle ABC$.

Угол $\angle EDC$ является дополнительным до 180^0 к углу $\angle ADC$, поэтому $\angle EDC = \psi$. Заметим, что какое бы положение ни занимала точка *D* на дуге между точками *A* и *C*, угол между продолжением хорды *AD* (т.е. линией *DE*) и хордой *DC* остается неизменным, равным ψ.

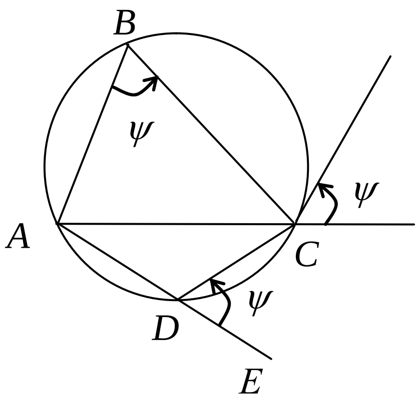


Рис.8.7

Теперь на комплексной плоскости совместим хорду *AC* с осью «+», а мнимую ось проведем через точку *A* перпендикулярно хорде *AC* (рис.8.8). Представим хорды *AC*, *AD* и *DC* векторами. Тогда

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}. \tag{8.1}$$

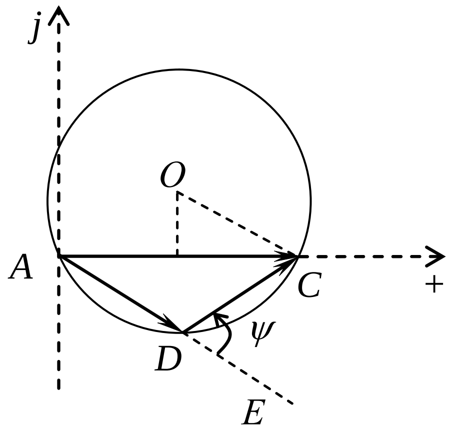


Рис.8.8

Вектор $\overrightarrow{DC}$ опережает вектор $\overrightarrow{AD}$ на угол ψ. Пусть модуль вектора $\overrightarrow{DC}$ будет в k раз больше модуля вектора $\overrightarrow{AD}$, тогда

$$\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AD} \cdot e^{j\psi}. \tag{8.2}$$

Если $k = 0$,то $\overrightarrow{DC} = 0$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. При $k = \infty$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD} = 0$. Подставим (8.2) в (8.1), получим $\overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{AD} \cdot e^{j\psi} = \overrightarrow{AC}$, или $\overrightarrow{AD}\left(1 + k \cdot e^{j\psi}\right) = \overrightarrow{AC}$. Из последнего равенства выразим $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left(1 + k \cdot e^{j\psi}\right)}. \tag{8.3}$$

Уравнение (8.3) называют *уравнением дуги окружности в векторной форме записи.*

При изменении коэффициента k от 0 до ∞ меняются оба вектора $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$, но так, что угол ψ между ними остается неизменным, а сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC}$. Конец вектора $\overrightarrow{AD}$ скользит по дуге окружности, хордой которой является вектор $\overrightarrow{AC}$. Поэтому можно сказать, что дуга окружности является геометрическим местом концов вектора $\overrightarrow{AD}$.

В линейной электрической цепи часто какая-нибудь комплексная величина (ток, напряжение) определяется уравнением вида

$$\dot{M} = \frac{\dot{B}}{S + N}, \tag{8.4}$$

где $S = s \cdot e^{j\alpha} = const$, $\dot{B} = b \cdot e^{j\beta} = const$, а $N = n \cdot e^{j\nu}$ - комплексная величина с неизменным аргументом $\nu = const$ и модулем n, изменяющимся в пределах от 0 до ∞.

Покажем, что геометрическим местом концов векторов $\dot{M}$ является дуга окружности. Для этого разделим числитель и знаменатель выражения (8.4) на постоянное число S:

$$\dot{M} = \frac{\dot{B}/S}{1 + N/S} = \frac{\dot{M}_0}{1 + \frac{n}{s} e^{j\psi}}, \qquad (8.5)$$

где $\dot{M}_0 = \dfrac{\dot{B}}{S}$ ($\dot{M}_0 = \dot{M}$ при $n = 0$), $\psi = \nu - \alpha$. Мы видим, что уравнение (8.5) по форме тождественно уравнению (8.3). Поэтому геометрическим местом концов вектора $\dot{M}$ является дуга окружности, для которой вектор $\dot{M}_0$ - хорда.

Перепишем уравнение (8.5) в виде $\dot{M} + \dot{M}\frac{n}{s}e^{j\psi} = \dot{M}_0$. При всех значениях n сумма двух изменяющихся векторов $\dot{M}$ и $\dot{M}\frac{n}{s}e^{j\psi}$ равна неизменному вектору $\dot{M}_0$.

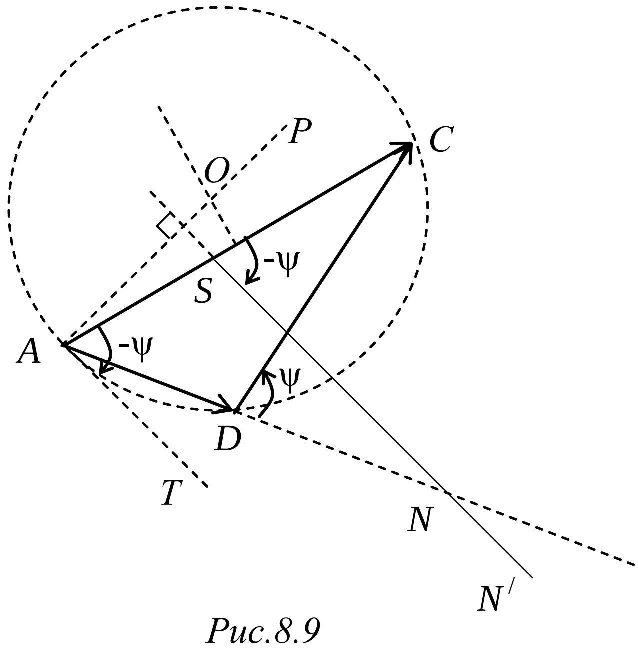


Рис.8.9

Пусть на рис.8.9 хорде $\dot{M}_0$ соответствует вектор $\overrightarrow{AC}$, вектору $\dot{M}$ соответствует вектор $\overrightarrow{AD}$, вектору $\dot{M}\frac{n}{s}e^{j\psi}$ - вектор $\overrightarrow{DC}$. Отложим от точки A по направлению хорды $\overrightarrow{AC}$ отрезок OS, равный по величине в некотором масштабе числу s. Затем через точку S проведем прямую SN' под углом (-ψ) к вектору $\overrightarrow{AC}$ и продолжим линию AD до пересечения в точке N с линией SN'. Получились два подобных треугольника ΔASN и ΔADC, так как $\angle CAD = \angle SAN$ и $\angle ADC = \angle ASN = \pi - \psi$.

Из подобия следует, что $\frac{SN}{AS} = \frac{DC}{AD} = \frac{n}{s}$. Таким образом, если отрезок *AS* соответствует *s*, то отрезок *SN* в том же масштабе определяет модуль *n* изменяющейся комплексной величины *N*. Линия SN' называется *линией изменяющегося параметра*. Откладывая на ней отрезки *SN*, соответствующие в некотором масштабе различным значениям *n* , и соединяя концы с точкой *A*, можно для любого значения *n* определить положение вектора $\dot{M} = \overrightarrow{AD}$. При увеличении *n* точка *D* приближается к точке *A*. В пределе при $n = \infty$ длина вектора $\dot{M}$ должна согласно (22) равняться нулю, следовательно точка *D* сольется с точкой *A*, т.е. секущая *AN* станет касательной *AT*. Так как точка *N* уйдет в бесконечность, то прямая *AT* будет параллельна линии изменяющегося параметра SN', поэтому перпендикуляр *AP* к линии изменяющегося параметра является вместе с тем перпендикуляром к касательной в точке *A* и, следовательно, совпадает по направлению с диаметром окружности, проведенным через точку *A*. Отсюда вытекает следующий прием построения круговой диаграммы:

1) откладывается вектор $\dot{M}_0$ - это хорда $\overrightarrow{AC}$ окружности;

2) от начала вектора $\dot{M}_0$ по его направлению откладываем отрезок *AS*, равный в произвольном масштабе *s*;

3) под углом $(-\psi) = \alpha - \nu$ к вектору $\dot{M}_0$ проводим линию изменяющегося параметра SN';

4) строим прямую *AP*, перпендикулярную линии SN'; прямая *AP* проходит через центр окружности;

5) проводим серединный перпендикуляр к вектору $\dot{M}_0 = \overrightarrow{AC}$ и продолжаем его до пересечения с линией *AP* в точке *O*, которая является центром искомой окружности.

Заметим, что «рабочая часть» окружности, т.е. та дуга, по которой перемещается точка *D*, расположена относительно хорды *AC* с той стороны, где находится линия изменяющегося параметра SN'.

Под *круговой диаграммой* тока или напряжения понимают дугу окружности, являющуюся геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) при изменении по модулю какого – либо сопротивления электрической цепи и сохранении неизменным остальных сопротивлений, частоты и э.д.с. источников энергии.

С помощью круговых диаграмм производят графический анализ работы электрических цепей.

Пример 10.1. Построить круговую диаграмму неразветвленной цепи (рис.8.10) с постоянным емкостным и переменным активным сопротивлениями. Определить по диаграмме значения тока для переменных активных сопротивлений: $R = n\ Ом$, $n = 0; 5; 10$, если к цепи приложено напряжение $U = 200\ \ B$, а емкостное сопротивление $X_C = 10\ \ Ом$.

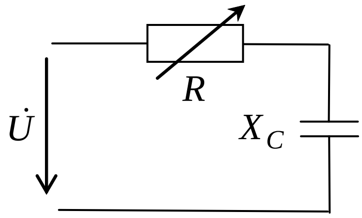


Рис.8.10

Решение.

Так как активное сопротивление $Z_R = R = n$,

емкостное сопротивление $Z_C = -10\,j$,

то комплексное сопротивление цепи $Z = Z_R + Z_C = n - 10\,j$.

Выражение для тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{200}{n - 10\,j} = \frac{\left(200 \big/ (-10\,j)\right)}{1 + \left(n \big/ (-10\,j)\right)} = \frac{20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{1 + \frac{n}{10} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

является уравнением дуги окружности. Поэтому геометрическим местом концов вектора $\dot{I}$ является дуга окружности, для которой вектор $20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ - хорда.

Построение круговой диаграммы выполним в следующем порядке:

1. Вычисляем ток при $R = n = 0\ \ Ом$: $\dot{I}_k = 20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$.

2. Выбираем масштаб для тока $m_i = 2\ A/см$ и откладываем вектор $\dot{I}_k$. Он представится вектором $\overrightarrow{AC}$ длиной $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{\left|\dot{I}_k\right|}{m_i} = \frac{20}{2} = 10\ см$, повернутым относительно действительной оси на угол $\frac{\pi}{2}$. Отрезок AC является хордой круговой диаграммы.

3. Определим масштаб сопротивлений $m_Z = \frac{\left|Z_C\right|}{\left|\dot{I}_k\right|} \cdot m_i = \frac{10}{20} \cdot 2 = 1\ Ом/см$

и вдоль прямой AC отложим отрезок $AS = \frac{X_C}{m_Z} = \frac{10}{1} = 10\ см$. Отрезок AS в масштабе m_Z представляет собой модуль емкостного сопротивления Z_C. В нашем случае точки S и C совпадают.

4. Из точки S под углом $(-\psi) = -\frac{\pi}{2}$ к вектору $\dot{I}_k$ проводим линию изменяющегося параметра SN'. Эта линия есть линия переменного сопротивления Z_R.

5. Из точки A проводим прямую $AD \perp SN'$.

6. Находим центр O круговой диаграммы как точку пересечения прямой AD и перпендикуляра к середине хорды AC.

7. Проводим дугу круговой диаграммы. Эта дуга ограничена хордой AC и лежит с той же стороны относительно хорды, где расположена линия SN'.

По построенной диаграмме (рис.8.11) определяем значения тока для переменных активных сопротивлений: $R = n\ Ом$, $n = 0; 5; 10$.

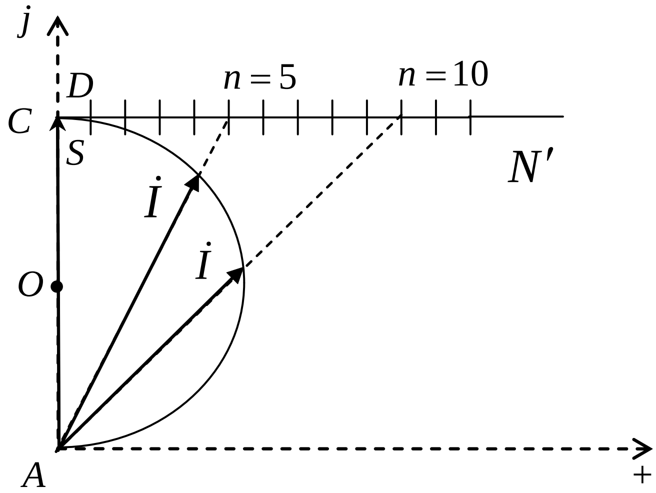


Рис.8.11

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8.

Построение круговых диаграмм.

1. Построить круговую диаграмму неразветвленной цепи (рис.8.12), если: $R_1 = n$ Ом, $n = 0; 1; 3$, $R = 3$ Ом, $X_L = 4$ Ом, $\dot{U} = 25$ В.

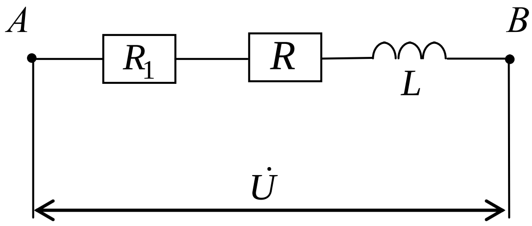


Рис.8.12

По диаграмме определить значения тока для переменных активных сопротивлений R_1.

2. Постройте круговую диаграмму неразветвленной цепи (рис.8.13), если $R_1 = n$ Ом, $R = 15$ Ом, $X_C = 8$ Ом; $\dot{U} = 68$ В.

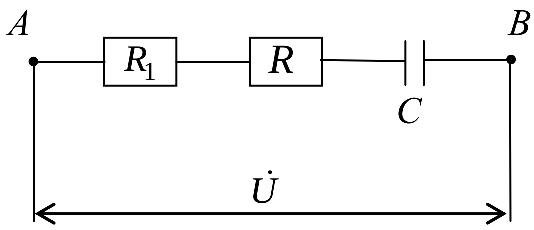


Рис.8.13

Самостоятельно задайте конкретные значения сопротивления R_1 и по диаграмме определите соответствующие значения токов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров.- М.: «Наука», 1965.

2. Ионкин П.А., Курдюков Н.Н., Кухаркин Е.С. Типовые примеры и задачи по теоретическим основам электротехники. – М.: «Высшая школа», 1965.

3. Шебес М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. – М.: «Высшая школа», 1973.

4. Маркушевич А.И., МаркушевичЛ.А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: «Просвещение», 1977.

5. Зайчик М.Ю. Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. -М.: Энергия, 1978. – 360с.

6. Зевке Г.В., Ионкин П.А., Нетушилов А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. –М.: Энергоатомиздат, 1989. -752с.

7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарика, 1999 или М.: Высшая школа, 1996.

8. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие / В.А. Прянишников и др. – СПб.: Крона принт,2001. -336с.

9.Символический метод расчета линейных цепей синусоидального тока. Часть III цикла «Методика расчета электрических цепей». / Т.А. Любарская и др.-М.:МИРЭА(ТУ), 2003.

11. Барашин С.А., Федоров В.В. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля. –М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 304с.

12 Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 14 (+CD). – СПб.: Питер, 2007. – 592 с.

13. ГОСТ 1494-77. Электротехника: Буквенные обозначения основных величин. [Текст] - М.: Изд-во стандартов, 1978.

14. ГОСТ 19880-74. Электротехника: Основные понятия. Термины и определения. [Текст] – М.: Изд-во стандартов, 1974.

Приложение

Задачи для контрольных заданий

Задача 1. Значения тока $i(t)$, напряжения $u(t)$ и частоты ω на некотором участке цепи приведены в таблице. Для каждой заданной синусоидальной функции:

1. найти сдвиг фаз между синусоидальными функциями, определить период и частоту;
2. найти сопротивление цепи, определить его тип, нарисовать эквивалентную схему.
3. вычислить активную, реактивную и полную мощности;
4. в пакете Mathcad на одном рисунке построить графики тока и напряжения;
5. выбрать масштаб и начертить вектор, изображающий ее на комплексной плоскости (оба вектора нарисовать на одном рисунке в одной системе координат).

№		№	
1	$i(t) = 200 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) A$, $u(t) = 50 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) B$, $\omega = 8000\ \ рад/\text{с}$.	2	$i(t) = 50 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) A$, $u(t) = 150 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) B$, $\omega = 125000\ \ рад/\text{с}$.
3	$i(t) = 600 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right) A$, $u(t) = 30 \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi)\ B$, $\omega = 3000\ \ рад/\text{с}$.	4	$i(t) = 60 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) A$, $u(t) = 250 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) B$, $\omega = 7500\ \ рад/\text{с}$
5	$i(t) = 50 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) A$, $u(t) = 120 \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right) B$, $\omega = 3000\ \ рад/\text{с}$.	6	$i(t) = 20 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) A$, $u(t) = 400 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) B$, $\omega = 5000\ \ рад/\text{с}$

7	$i(t)=80\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{3\pi}{4}\right)A,$ $u(t)=160\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{6}\right)B,$ $\omega=20000\ \ рад/\text{с}$	8	$i(t)=120\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{3}\right)A,$ $u(t)=50\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{3\pi}{4}\right)B,$ $\omega=7500\ \ рад/\text{с}$
9	$i(t)=400\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)A,$ $u(t)=120\sin\left(\omega\cdot t+\frac{3\pi}{4}\right)B,$ $\omega=25000\ \ рад/\text{с}$	10	$i(t)=10\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{3\pi}{4}\right)A,$ $u(t)=300\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{5\pi}{6}\right)B,$ $\omega=4000\ \ рад/\text{с}$
11	$i(t)=80\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)A,$ $u(t)=900\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{3}\right)B,$ $\omega=40000\ \ рад/\text{с}$	12	$i(t)=200\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{2\pi}{3}\right)A,$ $u(t)=50\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{5\pi}{6}\right)B,$ $\omega=10000\ \ рад/\text{с}$
13	$i(t)=500\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{6}\right)A,$ $u(t)=25\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{4}\right)B,$ $\omega=2500\ \ рад/\text{с}.$	14	$i(t)=10\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{6}\right)A,$ $u(t)=400\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)B,$ $\omega=40000\ \ рад/\text{с}$
15	$i(t)=120\cdot\sin(\omega\cdot t+\pi)A,$ $u(t)=50\sin\left(\omega\cdot t+\frac{2\pi}{3}\right)B,$ $\omega=20000\ \ рад/\text{с}.$	16	$i(t)=300\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{3\pi}{4}\right)A,$ $u(t)=10\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{5\pi}{6}\right)B,$ $\omega=8000\ \ рад/\text{с}.$
17	$i(t)=400\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)A,$ $u(t)=20\sin\left(\omega\cdot t+\frac{5\pi}{6}\right)B,$ $\omega=12500\ \ рад/\text{с}.$	18	$i(t)=120\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{3\pi}{4}\right)A,$ $u(t)=400\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{5\pi}{6}\right)B,$ $\omega=3000\ \ рад/\text{с}$

19	$i(t)=50\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{2\pi}{3}\right)A$, $u(t)=300\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)B$, $\omega=12500\ \ рад/с$.	20	$i(t)=50\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)A$, $u(t)=200\cdot\sin\left(\omega\cdot t-\frac{\pi}{3}\right)B$, $\omega=50000\ \ рад/с$.

<u>Задача 2</u>. Для двух синусоидальных токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$, заданных в таблице, найдите разность $i(t)=i_1(t)-i_2(t)$ при помощи векторной диаграммы и аналитически. Сравните полученные результаты. В пакете Mathcad на одном рисунке постройте графики токов $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i(t)$.

№		№	
1	$i_1(t)=70\sin\left(\omega\cdot t+30^0\right)A$, $i_2(t)=140\sin\left(\omega\cdot t-45^0\right)A$.	11	$i_1(t)=90\sin\left(\omega\cdot t+30^0\right)A$, $i_2(t)=54\sin\left(\omega\cdot t-30^0\right)A$.
2	$i_1(t)=150\sin\left(\omega\cdot t-90^0\right)A$, $i_2(t)=105\sin\left(\omega\cdot t-150^0\right)A$.	12	$i_1(t)=36\sin\left(\omega\cdot t-45^0\right)A$, $i_2(t)=18\sin\left(\omega\cdot t-135^0\right)A$.
3	$i_1(t)=25\sin\left(\omega\cdot t-120^0\right)A$, $i_2(t)=15\sin\left(\omega\cdot t-60^0\right)A$.	13	$i_1(t)=105\sin\left(\omega\cdot t+90^0\right)A$, $i_2(t)=150\sin\left(\omega\cdot t+150^0\right)A$.
4	$i_1(t)=16\sin\left(\omega\cdot t-30^0\right)A$, $i_2(t)=40\sin\left(\omega\cdot t+90^0\right)A$.	14	$i_1(t)=28\sin\left(\omega\cdot t-60^0\right)A$, $i_2(t)=12\sin\left(\omega\cdot t+60^0\right)A$.
5	$i_1(t)=80\sin\left(\omega\cdot t+60^0\right)A$, $i_2(t)=120\sin\left(\omega\cdot t-45^0\right)A$.	15	$i_1(t)=63\sin\left(\omega\cdot t+30^0\right)A$, $i_2(t)=49\sin\left(\omega\cdot t-45^0\right)A$.
6	$i_1(t)=24\sin\left(\omega\cdot t+135^0\right)A$, $i_2(t)=32\sin\left(\omega\cdot t+60^0\right)A$.	16	$i_1(t)=81\sin\left(\omega\cdot t-150^0\right)A$, $i_2(t)=45\sin\left(\omega\cdot t-120^0\right)A$.
7	$i_1(t)=49\sin\left(\omega\cdot t-60^0\right)A$, $i_2(t)=28\sin\left(\omega\cdot t+45^0\right)A$.	17	$i_1(t)=72\sin\left(\omega\cdot t+90^0\right)A$, $i_2(t)=40\sin\left(\omega\cdot t+120^0\right)A$.
8	$i_1(t)=48\sin\left(\omega\cdot t-90^0\right)A$,	18	$i_1(t)=30\sin\left(\omega\cdot t-30^0\right)A$,

	$i_2(t) = 64\sin\left(\omega \cdot t - 30^0\right)A$.		$i_2(t) = 42\sin\left(\omega \cdot t + 60^0\right)A$.
9	$i_1(t) = 210\sin\left(\omega \cdot t + 60^0\right)A$, $i_2(t) = 350\sin\left(\omega \cdot t - 45^0\right)A$.	19	$i_1(t) = 80\sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right)A$, $i_2(t) = 120\sin\left(\omega \cdot t - 60^0\right)A$.
10	$i_1(t) = 18\sin\left(\omega \cdot t + 45^0\right)A$, $i_2(t) = 36\sin\left(\omega \cdot t + 135^0\right)A$.	20	$i_1(t) = 48\sin\left(\omega \cdot t + 90^0\right)A$, $i_2(t) = 64\sin\left(\omega \cdot t + 30^0\right)A$.

Задача 3. Для схем, изображенных на рис.3.1 и рис.3.2, требуется определить, если это возможно, мгновенные значения величин: $i(t)$, $u(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$, $u_{RL}(t)$, $u_{RC}(t)$, $u_{CL}(t)$. Параметры схемы и ее номер для каждого варианта указаны в таблице. Построить векторную диаграмму напряжений.

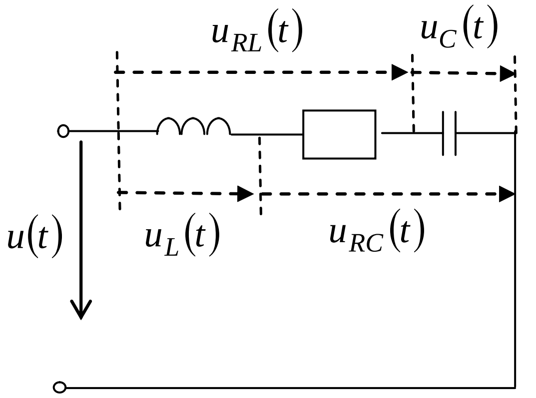


Рис.3.1

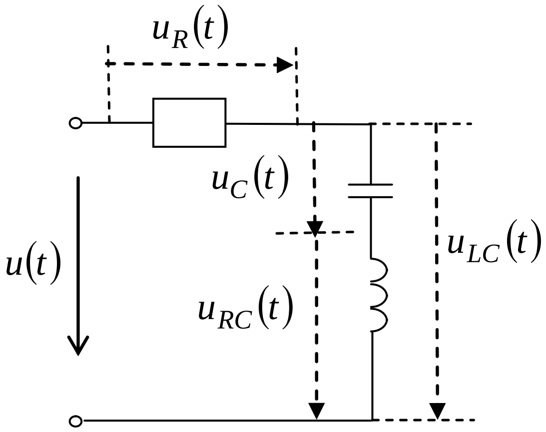


Рис.3.2

№	*R, Ом*	*L, мГн*	*C, мкФ*	Напряжения и токи
1 (Рис.3.1)	2	40	2000	$u(t) = 10\sin 100t$
2 (Рис.3.2)	4	30	2500	$i(t) = 2{,}121\sin\left(200t - 45^0\right)$
3 (Рис.3.1)	4	7,5	625	$u_L(t) = 10{,}91\sin\left(400t + 104^0\right)$
4 (Рис.3.2)	3	10	250	$u_C(t) = 113{,}1\sin\left(500t - 45^0\right)$

5 (Рис.3.1)	2	40	5000	$u_R(t) = 7{,}07\sin\left(100t - 45^0\right)$
6 (Рис.3.2)	4	3	200	$u_{LC}(t) = 17{,}89\sin\left(1000t - 64^0\right)$
7 (Рис.3.1)	4	15	12500	$u_{RL}(t) = 24{,}25\sin\left(200t + 51^0\right)$
8 (Рис.3.2)	8	25	312	$u_{RC}(t) = 54{,}88\sin\left(400t - 59^0\right)$
9 (Рис.3.1)	5	14	1000	$u(t) = 10\sin 500t$
10 (Рис.3.2)	4	30	2000	$i(t) = 3{,}354\sin\left(100t + 26^0\right)$
11 (Рис.3.1)	8	30	1250	$u_L(t) = 14{,}55\sin\left(200t + 76^0\right)$
12 (Рис.3.2)	3	60	400	$u_C(t) = 41{,}6\sin\left(50t - 56^0\right)$
13 (Рис.3.1)	6	40	1250	$u_R(t) = 16{,}64\sin\left(100t + 34^0\right)$
14 (Рис.3.2)	4	35	1250	$u_{LC}(t) = 9\sin\left(200t + 53^0\right)$
15 (Рис.3.1)	5	12	500	$u_{RL}(t) = 65{,}26\sin\left(500t + 29^0\right)$
16 (Рис.3.2)	4	5	500	$u_{RC}(t) = 15{,}37\sin\left(400t - 15^0\right)$
17 (Рис.3.1)	6	30	2500	$u(t) = 35\sin 200t$
18 (Рис.3.2)	8	5	625	$i(t) = 2{,}910\sin\left(400t + 14^0\right)$
19 (Рис.3.1)	4	8	400	$u_L(t) = 46{,}57\sin\left(500t + 104^0\right)$
20 (Рис.3.2)	2	6	250	$u_C(t) = 73{,}54\sin\left(1000t - 135^0\right)$

Задача 4. Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, требуется определить следующие характеристики:

1) полное комплексное сопротивление цепи и его тип, построить эквивалентную схему цепи;

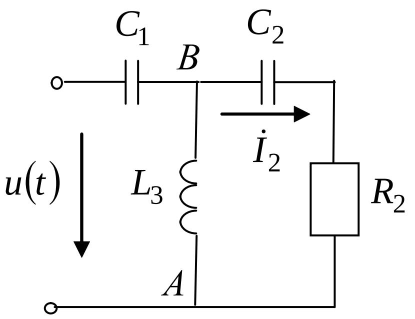
2) токи во всех ветвях цепи $i_1(t)$, $i_3(t)$;

3) напряжения $u(t)$ и $u_{AB}(t)$;

4) В пакете Mathcad записать синусоидальные функции времени для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и построить их графики.

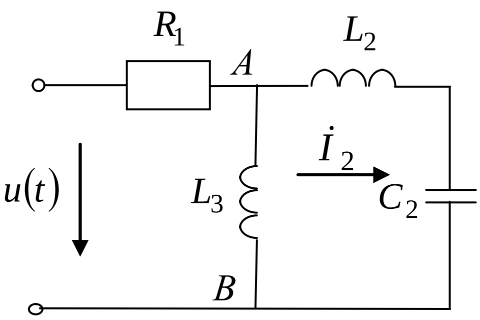
5) построить векторную диаграмму токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Параметры электрической цепи указаны на рисунке схемы. Номер рисунка соответствует номеру варианта.



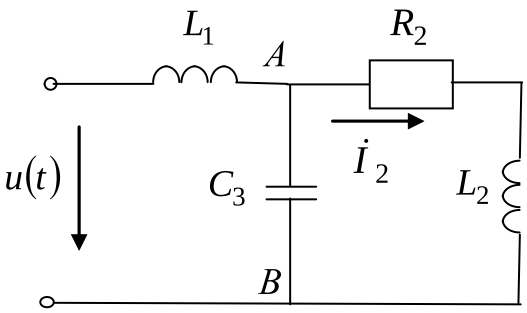
$C_1 = 1250\ мкФ$;
$R_2 = 2\ Ом$;
$C_2 = 5000\ мкФ$;
$L_3 = 20\ мГн$;
$i_2(t) = 5\sin(100t + 90^0)A$.

Рис.4.1



$R_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ Ом$;
$C_2 = 1250\ мкФ$;
$L_2 = 25\ мГн$;
$L_3 = 5\ мГн$;
$i_2(t) = 8\sqrt{3}\sin(200t - 60^0)$А.

Рис.4.2



$L_1 = 10\ мГн$;
$R_2 = 2\ Ом$;
$L_2 = 5\ мГн$;
$C_3 = 625\ мкФ$
$i_2(t) = 5\sin(400t - 90^0)A$.

Рис.4.3

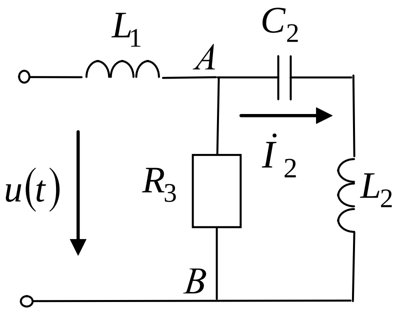


Рис.4.4

$L_1 = 5$ *мГн*;
$L_2 = 20$ *мГн*;
$C_2 = 40$ *мкФ*;
$R_3 = 5$ *Ом*;
$i_2(t) = 5\sin 1000t$ *A*.

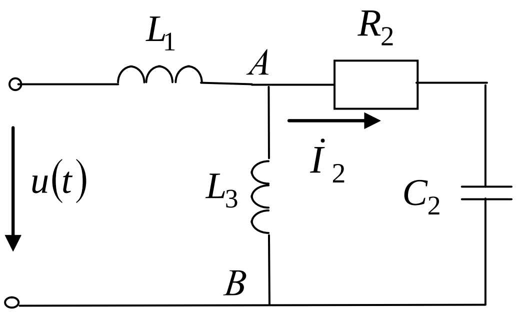


Рис.4.5

$L_1 = 2$ *мГн*;
$L_3 = 6$ *мГн*;
$R_2 = 1$ *Ом*;
$C_2 = 2000$ *мкФ*;
$i_2(t) = 18\sqrt{2}\sin\left(500t + 90^0\right) A$

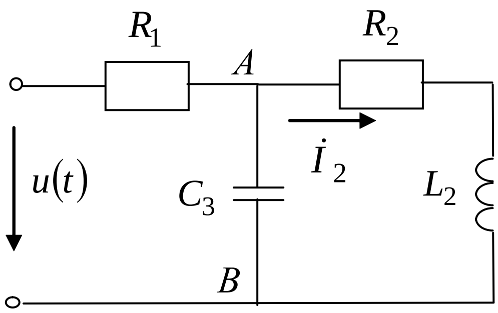
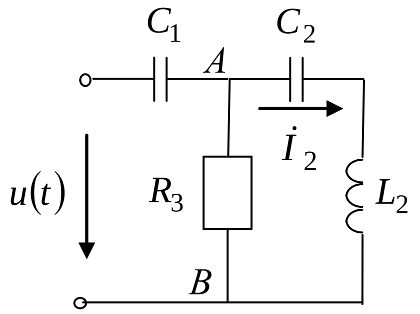


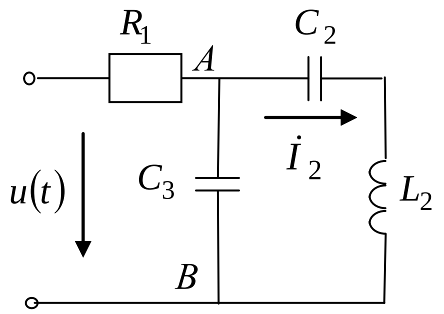
Рис.4.6

$R_1 = 2$ *Ом*;
$L_2 = 10$ *мГн*;
$R_2 = 5$ *Ом*;
$C_3 = 400$ *мкФ*;
$i_2(t) = 2\sqrt{2}\sin 500t$ *A*.



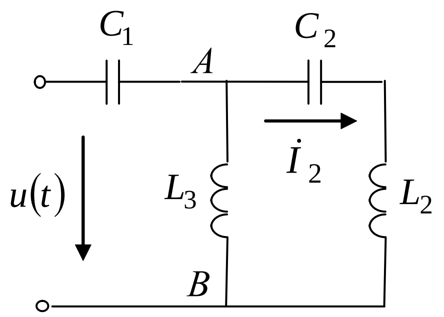
$C_1 = 5000$ *мкФ*;
$L_2 = 20$ *мГн*;
$C_2 = 1000$ *мкФ*;
$R_3 = 1$ *Ом*;
$i_2(t) = 25\sqrt{2}\sin\left(200t + 135^0\right) A$

Рис.4.7



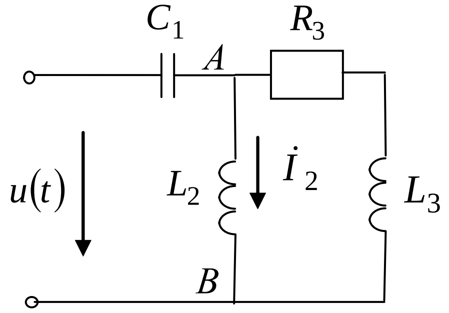
$R_1 = 2$ *Ом*;
$C_2 = 500$ *мкФ*;
$L_2 = 4$ *мГн*;
$C_3 = 1000$ *мкФ*;
$i_2(t) = 20\sin\left(500t + 45^0\right) A$.

Рис.4.8



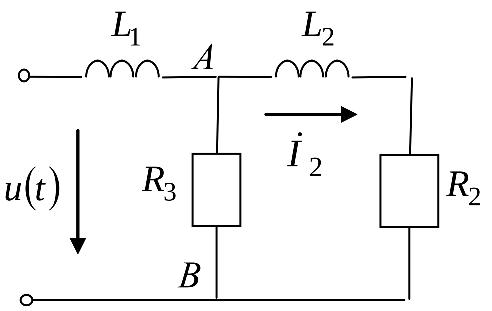
$C_1 = 1000$ *мкФ*;
$L_2 = 8$ *мГн*;
$C_2 = 200$ *мкФ*;
$L_3 = 1$ *мГн*;
$i_2(t) = 10\sin\left(1000t - 45^0\right) A$.

Рис.4.9



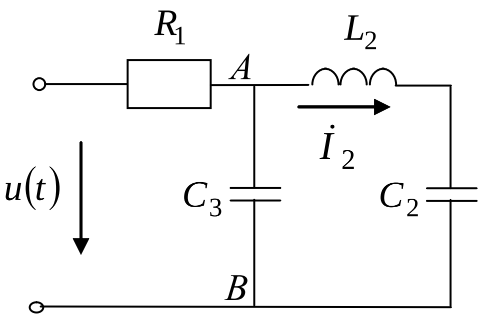
$C_1 = 312{,}5$ *мкФ*;
$L_2 = 2{,}5$ *мГн*;
$L_3 = 5$ *мГн*;
$R_3 = 4$ *Ом*;
$i_2(t) = 16\sqrt{2}\sin 800t\ A$

Рис.4.10



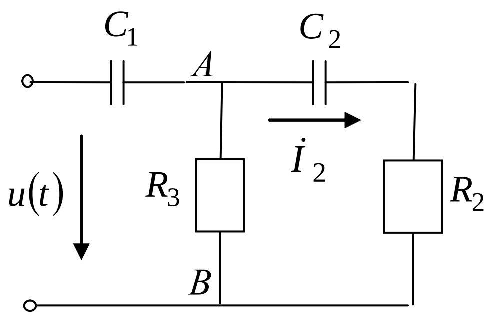
$L_1 = 5\ мГн$;
$L_2 = 10\ мГн$;
$R_2 = 5\ Ом$;
$R_3 = 2\ Ом$;
$i_2(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(500t + 45^0\right)A$.

Рис.4.11



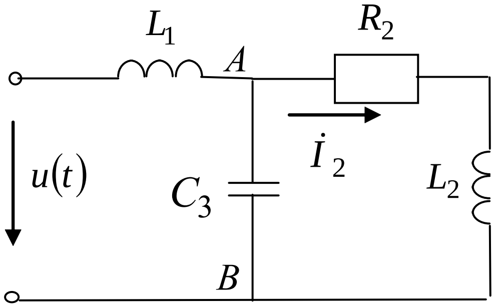
$R_1 = 2\ Ом$;
$C_2 = 200\ мкФ$;
$L_2 = 4\ мГн$;
$C_3 = 200\ мкФ$;
$i_2(t) = 30\sin\left(1000t + 30^0\right)A$.

Рис.4.12



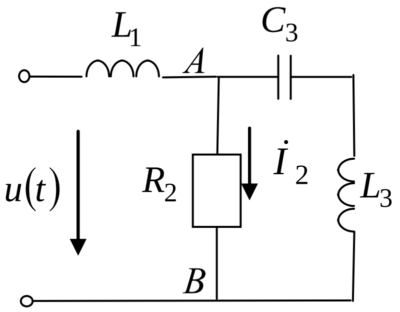
$C_1 = 5000\ мкФ$;
$C_2 = 1000\ мкФ$;
$R_2 = 2{,}5\ Ом$;
$R_3 = 2{,}5\ Ом$;
$i_2(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(400t + 90^0\right)A$.

Рис.4.13



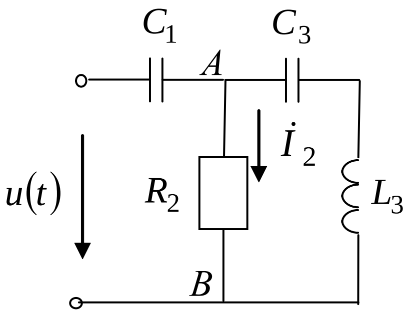
$L_1 = 6\ мГн$;
$L_2 = 2\ мГн$;
$R_2 = 1\ Ом$;
$C_3 = 2000\ мкФ$;
$i_2(t) = 18\sqrt{2}\sin\left(500t - 45^0\right)A$.

Рис.4.14



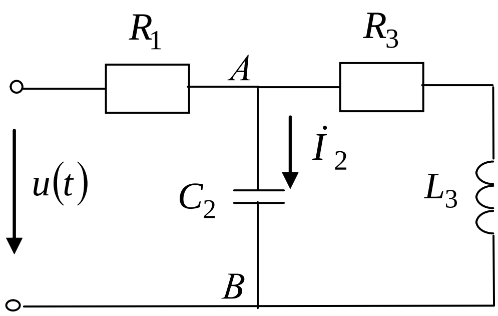
$L_1 = 20\ мГн$;
$R_2 = 1\ Ом$;
$L_3 = 30\ мГн$;
$C_3 = 1000\ мкФ$;
$i_2(t) = 35\sin\left(200t + 60^0\right) A$.

Рис.4.15



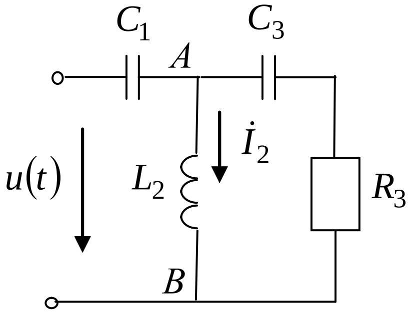
$C_1 = 5000\ мкФ$;
$R_2 = 2\ Ом$;
$L_3 = 60\ мГн$;
$C_3 = 2000\ мкФ$;
$i_2(t) = 20\sin\left(100t + 120^0\right) A$.

Рис.4.16



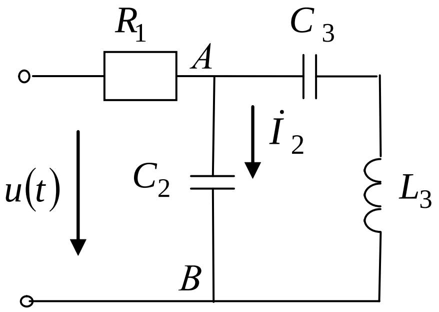
$R_1 = 1\ Ом$;
$L_3 = 20\ мГн$;
$R_3 = 2\ Ом$;
$C_2 = 5000\ мкФ$;
$i_2(t) = 8\sqrt{2}\sin\left(100t + 45^0\right) A$.

Рис.4.17



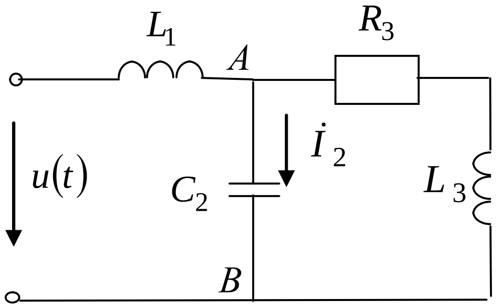
$C_1 = 500\ мкФ$;
$L_2 = 2\ мГн$;
$R_3 = 4\ Ом$;
$C_3 = 125\ мкФ$;
$i_2(t) = 20\sqrt{2}\sin 2000t\ A$.

Рис.4.18



$R_1 = 2$ *Ом*;
$C_2 = 2500$ *мкФ*;
$C_3 = 500\ 0$*мкФ*;
$L_3 = 60$ *мГн*;
$i_2(t) = 5\sin(100t + 120^0)\,A$.

Рис.4.19



$L_1 = 20$ *мГн*;
$C_2 = 2500$ *мкФ*;
$L_3 = 10$ *мГн*;
$R_3 = 2$ *Ом*;
$i_2(t) = 15\sqrt{2}\sin(200t + 135)\,A$.

Рис.4.20

***<u>Задача</u>* 5.** Построить круговую диаграмму неразветвленной цепи. Определить по диаграмме значения тока для переменных сопротивлений. Для каждого варианта номер рисунка схемы и ее параметры даны в таблице.

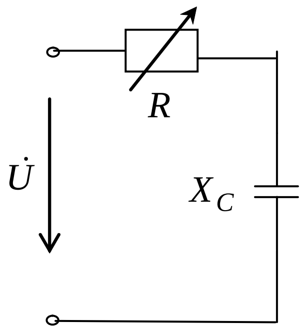


Рис.5.1

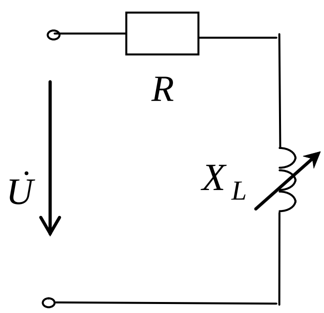


Рис. 5.2

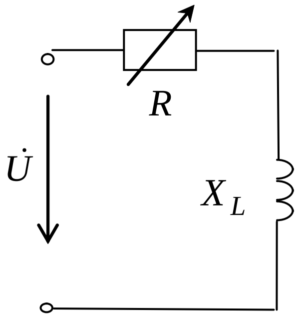


Рис.5.3

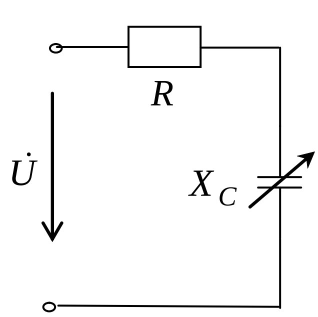


Рис. 5.4

№		№	
1 (Рис.5.1)	$R = n\ Ом,\quad X_C = 5\ Ом,$ $n = 0; 2; 4\ \ \dot{U} = 25\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.	11 (Рис.5.3)	$R = n\ Ом,\quad X_L = 3\ Ом,$ $n = 0; 1; 2\ \ \dot{U} = 15\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.
2 (Рис.5.2)	$R = 3\ Ом,\quad X_L = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \ \dot{U} = 18\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.	12 (Рис.5.4)	$R = 2\ Ом,\quad X_C = n\ Ом,$ $n = 0; 2; 4\ \ \dot{U} = 30\ \ B$ масштаб токов $m_i = 3\ \ А/см$.
3 (Рис.5.3)	$R = n\ Ом,\quad X_L = 3\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \ \dot{U} = 21\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1{,}4\ \ А/см$.	13 (Рис.5.1)	$R = n\ Ом,\quad X_C = 5\ Ом,$ $n = 0; 2; 4\ \ \dot{U} = 35\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1{,}4\ \ А/см$.
4 (Рис.5.4)	$R = 3\ Ом,\quad X_C = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \ \dot{U} = 18\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.	14 (Рис.5.2)	$R = 2\ Ом,\quad X_L = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 2\ \ \dot{U} = 8\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.
5 (Рис.5.1)	$R = n\ Ом,\ \ n = 0; 3; 5$ $X_C = 10\ Ом,\ \ \dot{U} = 60\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1{,}2\ \ А/см$.	15 (Рис.5.3)	$R = n\ Ом,\quad X_L = 6\ Ом,$ $n = 0; 3; 5\ \ \dot{U} = 150\ \ B$ масштаб токов $m_i = 5\ \ А/см$.
6 (Рис.5.2)	$R = 3\ Ом,\quad X_L = n\ Ом,$ $n = 0; 2; 4\ \ \dot{U} = 15\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.	16 (Рис.5.4)	$R = 4\ Ом,\quad X_C = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 2\ \ \dot{U} = 28\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1{,}4\ \ А/см$.
7 (Рис.5.3)	$R = n\ Ом,\quad X_L = 6\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \ \dot{U} = 30\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.	17 (Рис.5.1)	$R = n\ Ом,\quad X_C = 6\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \ \dot{U} = 30\ \ B$ масштаб токов $m_i = 1\ \ А/см$.

8 (Рис.5.4)	$R = 2\ Ом,\quad X_C = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \dot{U} = 60\ В$ масштаб токов $m_i = 6\ А/см$.	18 (Рис.5.2)	$R = 10\ Ом,\quad X_L = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \dot{U} = 150\ В$ масштаб токов $m_i = 3\ А/см$.
9 (Рис.5.1)	$R = n\ Ом,\quad X_C = 2\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \dot{U} = 10\ В$ масштаб токов $m_i = 1\ А/см$.	19 (Рис.5.3)	$R = n\ Ом,\quad X_L = 4\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \dot{U} = 16\ В$ масштаб токов $m_i = 1\ А/см$.
10 (Рис.5.2)	$R = 5\ Ом,\quad X_L = n\ Ом,$ $n = 0; 1; 3\ \dot{U} = 20\ В$ масштаб токов $m_i = 1\ А/см$.	20 (Рис.5.4)	$R = 6\ Ом,\quad X_C = n\ Ом,$ $n = 0; 2; 4\ \dot{U} = 60\ В$ масштаб токов $m_i = 2\ А/см$

СОДЕРЖАНИЕ